TAMPEREEN YLIOPISTO
Informaatiotieteiden tiedekunta
Lisensiaatintutkimus

Suvi Lehtinen

Määriteltävyys modaalilogiikoissa

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Marraskuu 2005

Tiivistelmä

Tässä työssä tarkastellaan kehystason määriteltävyyttä erilaisissa modaalilogiikoissa. Lähtökohtana on Goldblatt-Thomasonin lause, jonka mukaan elementaarinen kehysluokka on modaalisesti määriteltävissä täsmälleen silloin, kun se on suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen sekä heijastaa ultrafiltterilaajennuksia. Elementaariset kehysluokat ovat kompakteja tavallisen modaalilogiikan suhteen, minkä johdosta ensimmäisessä Goldblatt-Thomasonin lauseen analogiassa on siirrytty tarkastelemaan kompaktisuutta. Sen mukaan generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen suljettu $\mathcal{L}$-kompakti kehysluokka on $\mathcal{L}$-määriteltävissä kehysluokan C suhteen, kun oletetaan, että luokan C jokaista kehystä $\mathcal{F}$ ja sen pistettä w kohti on olemassa logiikan $\mathcal{L}$ sellainen kaavajoukko Δ, että Δ toteutuu pisteessä w ja jos se toteutuu kehyksen $\mathcal{G}$ jossain pisteessä v, niin $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva. Esimerkiksi äärellisesti haaratuvien kehysten luokka toteuttaa tämän ehdon, mistä seuraa, että $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$-kompakti kehysluokka K on määriteltävissä suhteessa äärellisesti haarautuvien kehysten luokkaan, kun K on suljettu mainittujen sulkeumaehtojen suhteen. Jos edellä voidaan olettaa, että p-morfisena kuvana olemisen välittämiseen riittää yksittäinen $\mathcal{L}$-kaava, voidaan kompaktisuusoletuksesta luopua. Tällainen kaava löytyy modaalisessa μ-kalkyylissä, kun rajoitutaan äärellisten kehysten luokkaan. Äärellisyysrajoituksesta päästään eroon siirtymällä äärettömät disjunktiot ja konjunktiot sallivaan modaalilogiikkaan tai muuhun modaalilogiikkaan, jossa polkukvanttori on määriteltävissä ja propositiosymboleita on käytössä riittävän paljon erottelemaan tarkasteltavien kehysten kaikki pisteet toisistaan. Esimerkiksi äärettömien kielten avulla polkukvanttori A voidaan määritellä kaavalla $\bigwedge\{\Box^n\varphi \mid n \in \mathbf{N}\}$. Tällöin tarkasteltavien kehysten kokoa täytyy kuitenkin rajoittaa tai vaihtoehtoisesti sallia, että propositiosymboleja on käytössä aito luokka. Lopuksi tarkastellaan vielä laskentaoperaattoreita käyttävää GML-määriteltävyyttä, määritellään g-saturoituvat mallit ja osoitetaan, että GML-kompakti kehysluokka on GML-määriteltävissä äärellisesti haarautuvien kehysten luokassa täsmälleen silloin, kun se on suljettu g-morfisten kuvien, generoitujen alikehysten ja erillisten yhdisteiden suhteen. Myös laskentaoperaattoreita käyttävää modaalilogiikkaa laajennetaan polkukvanttorin avulla ja esitetään perinteiselle modaalilogiikalle analogiset tulokset μGML-määriteltävyydestä ja $\mathrm{GML}_{\infty,\omega}$-määriteltävyydestä.

Abstract

This work is about definability on the level of frames in various modal logics. The starting point is the Goldblatt-Thomason Theorem, which states that an elementary class of frames is modally definable if and only if it is closed under generated submodels, disjoint unions and bounded morphic images and reflects ultrafilter extensions. Elementary frameclasses are $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$-compact. Here we prove that an $\mathcal{L}$-compact frameclass which is closed under generated submodels, disjoint unions and bounded morphic images, is $\mathcal{L}$-definable with respect to a frameclass C, if we can assume that for each frame $\mathcal{F} \in C$ and its point w there exists a set of formulas Δ such that Δ is satisfied in a point w and if it is satisfied in a point v of a frame $\mathcal{G}$, then $\mathcal{F}_w$ is a bounded morphic image of $\mathcal{G}_v$. For example the class of image finite frames fulfills this condition and therefore $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$-compact frameclass is definable with respect to the class of image finite frames, if the mentioned closure conditions are fulfilled. If we can assume that being a bounded morphic image can be transferred by a single $\mathcal{L}$-formula instead of a set of formulas, we can leave out the compactness condition. Such a formula can be written in modal μ-calculus, when we restrict ourselves to the class of finite frames. We get rid of finiteness by allowing infinite disjunctions and conjunctions and sufficiently large amount of proposition symbols (possibly a proper class) to separate each point of a frame to be considered. Then we do not need fixed points to define the path quantifier A, formula $\bigwedge\{\Box^n\varphi \mid n \in \mathbf{N}\}$ will do. Thereby we get that, a class of frames $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-definable with respect to a frameclass in which the size of every frame is at most κ if it is closed under generated submodels, disjoint unions and bounded morphic images and the size of Φ is at least κ. In the last section we concider definability in graded modal logics. We define the notion of g-saturated models and g-morphic images and prove that GML-compact frameclass is GML-definable with respect to the class of image finite frames if and only if it is closed under g-morphic images, generated subframes and disjoint unions. Then we add the path quantifier also to graded modal logics and prove that a class of frames K is definable with respect to the class of finite frames by simple $\mu\mathrm{GML}[\Phi]$-formulas, if K is closed under generated submodels, disjoint unions and bounded morphic images and the size of Φ is at least ω. Futhermore we show that a class of frames is definable with respect to a class of frames in which the size of every frame is at most κ by $\mathrm{GML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-formulas, if it is closed under the mentioned closure conditions and the size of Φ is at least κ.

Sisältö

1 Johdanto

Määriteltävyysteoria on logiikan osa-alue, jonka tehtävänä on tutkia ja vertailla erilaisten logiikoiden ilmaisuvoimia. Yksi peruskysymys on tällöin, millaisia malliluokkia valitulla logiikalla pystytään karakterisoimaan. Kuhunkin tarkoitukseen sopivaa logiikkaa etsittäessä valinta tehdään ilmaisuvoiman ja muiden "hyvien ominaisuuksien" väliltä. Ilmaisuvoiman kasvattaminen johtaa usein ei-toivottuihin seurauksiin kuten epätäydellisyystuloksiin.

Tässä työssä peruslähtökohdaksi on valittu tavallisen modaalilogiikan kieli ML$[\Phi, \tau_0]$, jonka etuna on yksinkertainen syntaksi. Toisaalta tällöin semanttiset tarkastelut joudutaan rajaamaan Kripke-malleihin, jotka ovat oleellisesti relationaalisia struktuureita, joissa on käytössä yksi kaksipaikkainen relaatio ja propositiosymboleiden tulkintaa vastaavat yksipaikkaiset relaatiot. Modaalilogiikan kaavat voidaankin kääntää suoraviivaisesti ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavoiksi, joissa edellä mainitun relationaalisen aakkoston lisäksi riittää kaksi muuttujasymbolia ja relaatioilla rajoitetut kvantifioinnit. Toisaalta voidaan osoittaa, että mallien tasolla tavallinen modaalilogiikka vastaa ensimmäisen kertaluvun logiikan bisimulaatioinvarianttia fragmenttia. Kehysten tasolle siirtyminen antaa kuitenkin lisää ilmaisuvoimaa sallimalla perinteisen logiikan näkökulmasta monadisia toisen kertaluvun kvantifiointeja. On olemassa kehysluokkia, jotka voidaan määritellä modaalilogiikassa, muttei ensimmäisen kertaluvun logiikassa.

Tässä työssä määriteltävyydesssä liikutaan pääsääntöisesti kehysten tasolla. Goldblatt-Thomasonin lause on klassinen tulos, joka poimii elementaarisesti (ensimmäisen kertaluvun logiikassa) määriteltävissä olevien kehysluokkien joukosta täsmälleen ne, jotka ovat suljettuja tiettyjen kehyskonstruktioiden suhteen. Näistä konstruktioista kolme (generoidut alimallit, erilliset yhdisteet ja p-morfiset kuvat) on hyvin luonnollisia, mutta neljäs aiheuttaa jo enemmän päänvaivaa. Tämän työn lähtökohtana onkin ollut "päästä eroon" Goldblatt-Thomasonin lauseen neljännestä ehdosta, ultrafiltterilaajennuksista. Toinen, edellisen kappaleen jälkeen perusteltu, tavoite on ollut elementaarisuusoletuksesta luopuminen.

Ensimmäisessä varsinaisessa luvussa (Luku 2) esitellään työssä tarvittavia peruskäsitteitä. Lukijan oletetaan kuitenkin hallitsevan tavallisen modaalilogiikan syntaksiin ja semantiikkaan liittyvät peruskäsitteet, jotka esitellään vain hyvin pintapuolisesti. Hyviä lähteitä tarkempaan perehtymiseen ovat esimerkiksi [1] ja [10]. Luvussa 3 esitellään lähtökohtana olevan Goldblatt-Thomasonin lauseen esittämisessä ja todistamisessa tarvittavia käsitteitä. Koska luvun 2 käsitteet ovat jatkon kannalta keskeisessä asemassa, on ne pyritty esittämään ja todistamaan niitä koskevat tulokset huolellisesti. Sen sijaan luvussa 3 nojaudutaan kirjallisuuteen ja klassisen malliteorian tuloksiin ainakin niiden käsitteiden ja tulosten osalta, jotka eivät ole tämän työn kannalta yhtä olennaisia.

Lukujen 4 ja 5 tulokset pohjaavat pääsääntöisesti (Jankov-Fine-kaavojen esittelyä ja niistä seuraavaa lemmaa lukuunottamatta) omaan työhön ja sen pohjalta muun tutkimusryhmän (Tampereen yliopiston logiikanryhmä) kanssa käytyihin keskusteluihin. Vaikka ne ovatkin paikoin lähdeviitteiden osalta niukkoja, löytyy taustalta kuitenkin monenlaisia keskusteluja, kursseja, kirjoja, artikkeleita, seminaareja, lukupiirejä ja niiden pohjalta heränneitä ajatuksia. Ajatus polkukvanttorista tuli van Benthemin artikkelin [2] tiimoilta ja se oli helppo määritellä μ-kalkyylissä ja edelleen äärettömän modaalilogiikan avulla.

Inspiraatio lukuun 6 syntyi Conradien [5] työtään käsittelevän esitelmän pohjalta. Myöhemmin löytyi myös alkuperäinen de Rijken [11] g-bisimulaation määritelmä. Näiden lähteiden pohjalta oli hyvä lähteä kehittämään Goldblatt-Thomasonin lauseen analogian todistamisessa tarvittavia käsitteitä ja tuloksia aiempien lukujen tapaan.

2 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa määritellään jatkossa tarvittavia peruskäsitteitä ja osoitetaan joitakin näitä koskevia perustuloksia. Luvun tarkasteluissa käytetään tavallista modaalilogiikan kieltä ML$[\Phi, \tau_0]$, joka saadaan lisäämällä joukon Φ propositiosymboleilla varustettuun propositiologiikkaan similariteettityypin[1] [1, s. 11] $\tau_0 = (\{\Diamond\}, \{(\Diamond, 1)\})$ yksipaikkainen modaalioperaattori $\Diamond$. Operaattorin $\Diamond$ duaalioperaattorille käytetään merkintää $\Box$ ja se määritellään ehdon $\Box =_{df} \neg\Diamond\neg$ avulla.

ML$[\Phi, \tau_0]$-kaavojen tulkinnassa käytetään (Kripke-)kehyksiä $\langle W, R\rangle$ ja -malleja $\langle W, R, V\rangle$, missä W on epätyhjä (maailmojen/pisteiden) joukko, $R \subseteq W \times W$ kaksipaikkainen relaatio ja $V : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ valuaatio(funktio), jonka avulla propositiosymboleiden totuus määräytyy. Propositiosymboli $p \in \Phi$ on tosi mallin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ pisteessä $w \in W$ (merkitään $\mathcal{M}, w \models p$), jos $w \in V(p)$. Konnektiivien osalta totuusehdot määritellään luonnollisella tavalla. Kaavan $\Diamond\varphi$ totuus mallin $\mathcal{M}$ pisteessä w määräytyy ehdon

$$\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists w' \in W : ((w, w') \in R \text{ ja } \mathcal{M}', w' \models \varphi)$$

mukaisesti. Kaava φ on validi mallissa $\mathcal{M}$ (merkitään $\mathcal{M} \models \varphi$), jos se on tosi mallin $\mathcal{M}$ jokaisessa pisteessä. Kaava φ on validi kehyksessä $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ (merkitään $\mathcal{F} \models \varphi$), jos se on validi kehyksen $\mathcal{F}$ jokaisessa mallissa $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$.

Useat luvun tarkastelut voitaisiin yleistää myös tapaukseen, jossa sallitaan similariteettityyppi, joka sisältää useampia yksipaikkaisia modaalioperaattoreita tai useampipaikkaisia operaattoreita. Tällöin vastaavissa Kripke-malleissa ja -kehyksissä olisi vastaavasti käytössä useampia kaksipaikkaisia relaatioita tai ja useampipaikkaisia relaatioita. Myöhemmin tässä työssä tarkastellaan myös joitakin muita tässä esitellyn perusmodaalilogiikan laajennuksia (μ-kalkyyli, GML).

Yksi modaalilogiikan keskeisiä peruskäsitteitä on bisimulaation käsite.

Määritelmä 2.1 Olkoot $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ ja $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ Kripke-malleja. Epätyhjä relaatio $Z \subseteq W \times W'$ on *bisimulaatio* mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä, jos se toteuttaa seuraavat ehdot.

(i) Jos $(w, w') \in Z$, niin w ja w' toteuttavat samat propositiosymbolit.

(ii) Jos $(w, w') \in Z$ ja $(w, v) \in R$, niin on olemassa sellainen v', että $(v, v') \in Z$ ja $(w', v') \in R'$.

[1] Similariteettityyppi kertoo käytössä olevat operaattorit ja niiden paikkaluvut.

(iii) Jos $(w, w') \in Z$ ja $(w', v') \in R'$, niin on olemassa sellainen v, että $(v, v') \in Z$ ja $(w, v) \in R$.

Jos Z on bisimulaatio ja $(w, w') \in Z$, merkitään

$$Z : \ \mathcal{M}, w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{M}', w'.$$

Tällöin pisteet w ja w' ovat *bisimilaariset*. Jos on olemassa bisimulaatio Z mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ pisteiden w ja w' välillä, voidaan merkitä $\mathcal{M}, w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{M}', w'$. Mikäli mallit ovat asiayhteydestä selvät, voidaan merkitä lyhyesti $w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} w'$.

Merkitään $\mathcal{M}, w \equiv_{ML} \mathcal{M}', w'$, jos $(\mathcal{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}', w' \models \phi)$ pätee jokaisella modaalilogiikan kaavalla ϕ. Koska bisimilaarisia tiloja ei voi erottaa perusmodaalilogiikan kaavoilla, voidaan bisimulaation avulla arvioida mallien samankaltaisuutta modaalilogiikan näkökulmasta.

Propositio 2.1 *Olkoot* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *ja* $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ *Kripke-malleja. Jos* $\mathcal{M}, w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{M}', w'$, *niin* $\mathcal{M}, w \equiv_{ML} \mathcal{M}', w'$.

Todistus. Osoitetaan induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen, että

$$\forall w \forall w' : ((\mathcal{M}, w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{M}', w') \Rightarrow (\mathcal{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}', w' \models \phi)). \qquad (*)$$

Kun ϕ on propositiosymboli, on $(*)$ selvä bisimulaation määritelmän nojalla. Oletetaan, että $(*)$ on voimassa kaavoilla ψ_1 ja ψ_2. Selvästi tällöin $(*)$ on voimassa myös kaavojen ψ_1 ja ψ_2 boolen kombinaatioilla.

Oletetaan sitten, että $\phi = \Diamond\psi_i$ ja $\mathcal{M}, w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{M}', w'$. Jos $\mathcal{M}, w \models \phi$, on olemassa sellainen $v \in W$, että $(w, v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \models \psi_i$. Koska pisteet w ja w' ovat bisimilaariset, on olemassa sellainen $v' \in W'$, että $(w', v') \in R'$ ja pisteet v ja v' ovat bisimilaariset. Nyt induktio-oletuksen mukaan $\mathcal{M}', v' \models \psi_i$, joten $\mathcal{M}', w' \models \phi$. Ekvivalenssin toinen suunta saadaan vastaavasti, joten $(*)$ on voimassa myös modaalioperaattoreiden tapauksessa. $\square$

Kehysten välinen bisimilaarisuus määritellään jättämällä määritelmän 2.1 propositiosymboleita käsittelevä kohta (i) pois.

Määritelmä 2.2 Kehysten $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ja $\mathcal{F}' = \langle W', R'\rangle$ pisteet $w \in W$ ja $w' \in W'$ ovat bisimilaariset (merkitään $\mathcal{F}, w \mathrel{\underline{\leftrightarrow}} \mathcal{F}', w'$), mikäli on olemassa määritelmän 2.1 ehdot (ii) ja (iii) toteuttava relaatio $Z \subseteq W \times W'$, jolla $(w, w') \in Z$.

Jatkossa kiinnostuksen kohteeksi nousevat usein erityisesti sellaiset kehysten $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ja $\mathcal{F}' = \langle W', R' \rangle$ väliset bisimulaatiot $Z \subseteq W \times W'$, jotka toteuttavat ehdot $\forall w' \in W' : \exists w \in W : (w, w') \in Z$ ja $\forall w \in dom(Z) : \exists! w' \in W : (w, w') \in Z$ (eli ovat surjektiivisia osittaisfunktioita). Kutsutaan tällaisia kehysbisimulaatioita $\mathcal{F}'$*-kattaviksi*.

Propositio 2.2 *Kehysvalidisuus säilyy kattavissa kehysbisimulaatioissa.*

Todistus. Olkoon Z kehysten $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ja $\mathcal{F}' = \langle W', R' \rangle$ välinen $\mathcal{F}'$-kattava bisimulaatio ja olkoon kaava ϕ validi kehyksessä $\mathcal{F}$. Jos nyt kaava ϕ ei olisi validi kehyksessä $\mathcal{F}'$, olisi olemassa kehyksen $\mathcal{F}'$ malli $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}', V' \rangle$ ja sen piste v', joilla $\mathcal{M}', v' \not\models \phi$. Määritellään kehykseen $\mathcal{F}$ valuaatio V ehdon

$$u \in V(p) \Leftrightarrow (u \in dom(Z) \text{ ja } Z(u) \in V'(p))$$

avulla ja asetetaan $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$. Nyt määritelmän 2.1 ehto (i) on voimassa, joten Z on bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä. Koska Z on $\mathcal{F}'$-kattava, on olemassa sellainen $v \in W$, että $(v, v') \in Z$. Proposition 2.1 nojalla pisteet v ja v' toteuttavat täsmälleen samat kaavat. Siispä $\mathcal{M}, v \models \neg\phi$, mikä on ristiriita, sillä $\mathcal{M}$ on kehyksen $\mathcal{F}$ malli ja oletetiin, että $\mathcal{F} \models \phi$. ☐

Määritellään seuraavaksi kolme keskeistä kehyskonstruktiota: generoidut alikehykset, erilliset yhdisteet ja p-morfiset kuvat ja osoitetaan, että kehysvaliditsuus säilyy näissä konstruktioissa.

Määritelmä 2.3 (Joukon generoimat alikehykset) Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ Kripke-kehys. Epätyhjän *joukon* $U \subseteq W$ *generoima alikehys* $\mathcal{F}_U$ on kehys $\langle W', R' \rangle$, missä W' on pienin ehdon

$$U \subseteq W' \text{ ja } ((w \in W' \wedge (w, v) \in R) \Rightarrow v \in W')$$

toteuttava joukko ja $R' = R \cap (W' \times W')$. Jos $U = \{w\}$, voidaan puhua pisteen w generoimasta alikehyksestä $\mathcal{F}_w$. Jos generoivan pisteen korostaminen ei ole oleellista, voidaan puhua lyhyesti vain pistegeneroidusta kehyksestä.

On helppo nähdä, että alkuperäisen ja generoidun alikehyksen välillä on generoidun kehyksen kattava bisimulaatio (identtinen kuvaus), joten proposition 2.2 nojalla saadaan seuraava propositio.

Propositio 2.3 *Kehysvalidisuus säilyy generoiduissa alikehyksissä.*

Todistus. Olkoon kehys $\mathcal{F}' = \langle W', R' \rangle$ joukon U generoima kehyksen $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ alikehys. Nyt $Z = \{(w, w') \in W \times W' \mid w \in \mathcal{F}_U \text{ ja } w' = w\}$ on $\mathcal{F}'$-kattava bisimulaatio. $\square$

Generoidut alikehykset antavat mahdollisuuden siirtyä johonkin sopivaan kehyksen osaan, joka usein on alkuperäistä kehystä pienempi. Erillisten yhdisteiden avulla puolestaan yhdistetään useista pienistä palasista isompi kokonaisuus, jossa palaset eivät kuitenkaan pääse vaikuttamaan toisiinsa.

Määritelmä 2.4 (Erilliset yhdisteet) Kehysten $\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle$ $(i \in I)$ *erillinen yhdiste* $\biguplus_i \mathcal{F}_i$ on struktuuri $\langle \cup_i W_i', \cup_i R_i' \rangle$, missä joukot W_i' ja R_i' saadaan tekemällä alkuperäiset kehykset erillisiksi. Kanoninen tapa tähän erillistämiseen on määritellä

$$W_i' = \{(w, i) \mid w \in W_i\}$$

ja

$$R_i' = \{((w, i), (v, i)) \mid (w, v) \in R_i\}.$$

On hyvä huomata, että tämän kanonisen erottelutavan seurauksena yksittäisen kehyksen erillinen yhdiste ei ole identtinen alkuperäisen kehyksen kanssa, mikä voi joissain tilanteissa aiheuttaa sen, että tarkastelut on hoidettava "isomorfiaa vaille".

Kehysvalidisuus säilyy myös erillisissä yhdisteissä, mutta koska kattavaa bisimulaatiota ei saada määriteltyä kehysjoukolta kehykselle, joudutaan todistuksen eteen tekemään vähän enemmän töitä.

Propositio 2.4 *Kehysvalidisuus säilyy erillisissä yhdisteissä.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ kehysten $\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle$, $(i \in I)$, erillinen yhdiste. Oletetaan, että kaava ϕ on validi kehyksessä $\mathcal{F}_i$ kullakin $i \in I$ ja tehdään vastaoletus, että $\mathcal{F} \not\models \phi$. Tällöin on olemassa kehyksen $\mathcal{F}$ malli $\mathcal{N} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ ja sen piste (w, i), joka toteuttaa kaavan $\neg\phi$. Määritellään kehykseen $\mathcal{F}_i$ valuaatio V_i: $V_i(p) = \{w \mid (w, i) \in V(p)\}$ kullakin $p \in \Phi$ ja asetetaan $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}_i, V_i \rangle$. On helppo nähdä, että $Z = \{(w, (w, i)) \mid w \in \mathcal{F}_i\}$ on bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ välillä. Nyt proposition 2.1 nojalla $\mathcal{M}, w \models \neg\phi$, mikä on ristiriita, sillä $\mathcal{F}_i \models \phi$. Siis vastaoletus on väärä ja kaava ϕ on validi kehyksessä $\mathcal{F}$. $\square$

Määritellään vielä p-morfiset kuvat ja todetaan, että kehysvalidisuus säilyy myös niissä.

Määritelmä 2.5 (p-morfiset kuvat) Tarkastellaan kehyksiä $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ja $\mathcal{F}' = \langle W', R'\rangle$. Kuvaus $f : W \to W'$ on *p-morfismi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot.

(i) Jos $(w, v) \in R$, niin $(f(w), f(v)) \in R'$

(ii) Jos $(f(w), v') \in R'$, niin on olemassa v, jolla $(w, v) \in R$ ja $f(v) = v'$.

Jos on olemassa surjektiivinen p-morfismi kehykseltä $\mathcal{F}$ kehykselle $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}'$ on kehyksen $\mathcal{F}$ *p-morfinen kuva.*

Koska surjektiivinen p-morfismi on suoraan määritelmien nojalla kattava bisimulaatio, ei seuraava propositio todistusta kaipaa.

Propositio 2.5 *Kehysvalidisuus säilyy p-morfisissa kuvissa.*

Todistus. Seuraa suoraan propositiosta 2.2. □

Mallien tasolla modaalilogiikan kaavat voidaan suoraviivaisesti kääntää predikaattilogiikan kaavoiksi. Tätä varten tarvitaan perusmodaalilogiikkaa vastaava ensimmäisen kertaluvun aakkosto $\mathcal{A}_1$, jossa on yksipaikkainen predikaattisymboli P_i kutakin propositiosymbolia $p_i \in \Phi$ kohti ja lisäksi kaksipaikkainen relaatiosymboli R.

Määritelmä 2.6 (Standardikäännös) Olkoon x predikaattilogiikan muuttuja. ML$[\Phi, \tau_0]$-kaavan ϕ *standardikäännös* $ST_x(\phi)$ $\mathcal{A}_1$-kaavoiksi määritellään induktiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
ST_x(p_i) &= P_i(x) \\
ST_x(\neg\psi) &= \neg ST_x(\psi) \\
ST_x(\psi_1 \circ \psi_2) &= ST_x(\psi_1) \circ ST_x(\psi_2), \text{ kun } \circ \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \\
ST_x(\Diamond\psi) &= \exists y(R(x, y) \wedge ST_y(\psi)),
\end{aligned}$$

missä y on uusi muuttuja [1, Määritelmä 2.45, s. 84].

Standardikäännös on työkalu, jonka avulla päästään käyttämään (mallien tasolla liikuttaessa) predikaattilogiikasta tuttuja tuloksia. Voidaan nimittäin osoittaa, että jokaisella mallilla $\mathcal{M}$ ja sen pisteellä w on $\mathcal{M}, w \models \phi$ voimassa täsmälleen silloin, kun $\mathcal{M} \models ST_x(\phi)[w]$ ($\mathcal{M}$ voidaan tulkita myös predikaattilogiikan malliksi) on voimassa [1, Propositio 2.47, s. 85].

Tämän työn kannalta hyvin keskeinen käsite on (modaalinen) määriteltävyys kehystasolla.

Määritelmä 2.7 Kehysluokka K on *modaalisesti määriteltävissä*, jos on olemassa ML-kaavojen joukko Γ, joka määrittelee sen eli ehto

$$\mathcal{F} \in K \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \Gamma \tag{1}$$

on voimassa. Määriteltävyys voidaan esittää myös suhteessa johonkin kehysluokkaan C. Tällöin ehto (1) saa muodon $\forall \mathcal{F} \in C : (\mathcal{F} \in K \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \Gamma)$[2].

Seuraavassa luvussa esiteltävä Goldblatt-Thomasonin lause antaa kehysluokan sulkeumaehtoihin nojautuvan karakterisoinnin modaaliselle määriteltävyydelle. Edellisten toteamusten nojalla on luonnollista vaatia, että tällaisissa karakterisoinneissa oletetaan kehysluokan olevan suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen, sillä jokainen modaalisesti määriteltävä kehysluokka tosiaan on suljettu näiden konstruktioiden suhteen. Lisämielenkiintoa näille konstruktioille voidaan hakea analogioista universaalialgebraan (ks. [3]), missä luokan generoima varieteetti saadaan sulkemalla luokka ensin tulojen, sitten alialgebrojen ja lopuksi homomorfisten kuvien suhteen. Duaalisuusteoria (ks. [1, Luku 5.4]) ja yhteydet algebraan on kuitenkin varsinaisesti rajattu tämän työn ulkopuolelle. Yksi näitä kolmea kehyskonstruktiota yhdistävä modaalilogiikan tulos saadaan seuraavassa propositiossa, joka sallii näiden sulkeumaehtojen ollessa voimassa rajoittaa tarkastelut juurellisiin (pistegeneroituihin) kehyksiin, mikä on esimerkiksi myöhemmin esiteltävien Hintikka-kaavojen kirjoittamisen kannalta varsin käytännöllistä.

Propositio 2.6 *Jokainen kehys voidaan esittää pistegeneroitujen alikehystensä erillisen yhdisteen p-morfisena kuvana.*

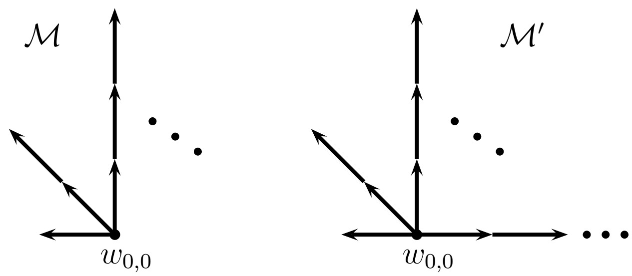
Todistus. Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ mielivaltainen kehys ja olkoon $\mathcal{G} = \langle W_{\mathcal{G}}, R_{\mathcal{G}} \rangle$ kehysten $\mathcal{F}_w$, $w \in W$, erillinen yhdiste. Määritellään

$$Z = \{((v, w), v) \in W_{\mathcal{G}} \times W \mid v, w \in W\}$$

ja osoitetaan, että Z on surjektiivinen p-morfismi $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$.

Ensinnäkin jokaisella kehyksen $\mathcal{G}$ pisteellä $(v, w) \in W_{\mathcal{G}}$ on olemassa yksikäsitteinen kuva $v \in W$. Toisaalta jokainen kehyksen $\mathcal{F}$ piste v on ainakin itsensä generoimassa alikehyksessä, joten jokaista kehyksen $\mathcal{F}$ pistettä v kohti on olemassa kehyksen $\mathcal{G}$ piste (v, v), joka kuvautuu pisteelle v. Siispä Z on surjektiivinen kuvaus. Osoitetaan vielä, että p-morfismin ehdot ovat voimassa.

[2]Huomaa, että tässä ei vaadita, että $K \subseteq C$ olisi voimassa.



Kuva 1: Esimerkin 1 mallit

(i) Oletetaan, että $((v, w), (v', w')) \in R_{\mathcal{G}}$. Koska $\mathcal{G}$ on erillinen yhdiste, on oltava $w = w'$ ja $(v, v') \in R_{\mathcal{F}_w} \subseteq R$. Siispä $(Z((v, w)), Z((v', w'))) = (v, v') \in R$.

(ii) Oletetaan sitten, että $(Z(v, w), v') = (v, v') \in R$. Nyt $v' \in \mathcal{F}_w$, joten erillisessä yhdisteessä $\mathcal{G}$ on piste (v', w), joka kuvautuu pisteeksi v' ja lisäksi $((v, w), (v', w)) \in R_{\mathcal{G}}$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla Z on p-morfismi. □

Edellä esitettyjen tarkastelujen nojalla voisi helposti päätyä esittämään, että määriteltävyyden karakterisoinnissa riittävään asemaan nousevat juuri generoidut alikehykset, erilliset yhdisteet ja p-morfiset kuvat, tai yleisemmin kattavat bisimulaatiot. Nämä eivät kuitenkaan riitä, sillä vaikka mallien pisteet toteuttaisivat täsmälleen samat modaalilogiikan kaavat, niiden ei silti tarvitse olla bisimilaarisia.

Esimerkki 1 [1, Esimerkki 2.23, s. 68-69] Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, missä $W = \{w_{i,j} \mid j < i \in \mathbf{N}\} \cup \{w_{0,0}\}$, $R = \{(w_{0,0}, w_{i,0}) \mid i \in \mathbf{N}\} \cup \{(w_{i,j}, w_{i,j+1}) \mid j + 1 < i \in \mathbf{N}\}$ ja $V(p) = \emptyset$ jokaisella $p \in \Phi$. Olkoon $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$, missä $W' = W \cup \{w_{\omega,j} \mid j \in \mathbf{N}\}$, $R' = R \cup \{(w_{0,0}, w_{\omega,0})\} \cup \{(w_{\omega,j}, w_{\omega,j+1}) \mid j \in \mathbf{N}\}$ ja $V(p) = \emptyset$ jokaisella $p \in \Phi$ (ks. kuva 1). Kuten myöhemmin tullaan (n-bisimulaatioiden kautta) huomaamaan, modaalilogiikan kaavat pystyvät puhumaan vain äärellisen mittaisista poluista. Siispä mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ pisteet $w_{0,0}$ toteuttavat täsmälleen samat kaavat. On kuitenkin helppo nähdä, että nämä pisteet eivät ole bisimilaarisia - toisessa mallissa on ääretön polku, mutta toisen mallin kaikki polut ovat äärellisiä. Kiinnitettiinpä mallin $\mathcal{M}'$ äärettömän polun alku relaatiolla Z miten tahansa, tullaan mallien relaatioita eteenpäin kulkemalla aina lopulta siihen tilanteeseen, että mallissa $\mathcal{M}$ on umpikuja ja mallissa $\mathcal{M}'$ voidaan jatkaa relaatiota eteenpäin.

Esimerkin 1 mallien juurien $w_{0,0}$ välillä on kuitenkin rajoitetumpi n-bisimulaatio jokaisella luonnollisella luvulla n. Tällainen n-bisimulaatio voidaan määritellä täsmällisesti pelin avulla.

Määritelmä 2.8 Olkoot $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ malleja ja w, w' vastaavasti niiden pisteitä. Peli $G_n((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$ $(n \in \mathbf{N})$ määritellään seuraavasti:

Pelaajat: Hyökkäävä pelaaja $\forall$ ja puolustava pelaaja $\exists$.

Alkutilanne: Jos $\mathcal{M}, w \models p \not\Leftrightarrow \mathcal{M}', w' \models p$ jollain $p \in \Phi$, niin $\exists$ häviää heti. Muutoin kiinnitetään $v_0 = w$ ja $v'_0 = w'$ ja asetetaan $k = 1$.

Pelinkulku: Jos $k = n+1$ peli on päättynyt. Oletetaan, että parit $(v_i, v'_i)_{i<k} \in W \times W'$ on pelattu, $1 \leq k \leq n$ eikä kumpikaan pelaajista ole vielä hävinnyt. Tällöin

1. Pelaaja $\forall$ valitsee siirtymän $(v_{k-1}, v_k) \in R$ tai $(v'_{k-1}, v'_k) \in R'$. Mikäli $\forall$ ei voi valita, peli päättyy ja tarkastetaan voittoehto.
2. Pelaaja $\exists$ valitsee jäljelle jääneestä mallista vastaavasti siirtymän $(v'_{k-1}, v'_k) \in R'$ tai $(v_{k-1}, v_k) \in R$. Jos $\exists$ ei voi valita, peli päättyy ja tarkastetaan voittoehto.
3. Tarkastetaan voittoehto. Kasvatetaan laskurin k arvoa yhdellä ja jatketaan peliä, mikäli kumpikaan pelaajista ei ole vielä hävinnyt.

Voittoehto: Pelaaja $\exists$ häviää pelin, jos

- hän ei voi tehdä valintaa kohdassa 2,
- $\mathcal{M}, v_k \models p \not\Leftrightarrow \mathcal{M}', v'_k \models p$ jollain $p \in \Phi$.

Jos $\exists$ ei ole hävinnyt millään pelatulla kierroksella $k \leq n$, hän voittaa pelin.

Muutoin $\forall$ voittaa. (Tasapelejä ei tunneta.)

Määritelmä 2.9 Pelaajan X strategia pelissä G on joukko sääntöjä, jotka kertovat täsmällisesti miten kussakin pelitilanteessa tulee menetellä. Pelaajan X käyttämä strategia on *voittostrategia*, jos strategiaa noudattaen peli päättyy aina pelaajan X voittoon toisen pelaajan siirroista riippumatta. Kun pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $G_n((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$, sanotaan, että pisteet w ja w' ovat *n-bisimilaariset*. Merkitään tällöin $\mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathcal{M}', w'$.

Kuvasta 1 on helppo nähdä, että esimerkin 1 mallien juuret ovat n-bisimilaariset jokaisella $n \in \mathbf{N}$. Bisimilaarisuus kaatui äärettömään polkuun, mutta n-bisimilaarisuuden tapauksessa mallin $\mathcal{M}'$ ääretöntä polkua voidaan käydä läpi vain n askelta. Koska n on pelissä etukäteen kiinnitetty ja mallista $\mathcal{M}$ löytyy kaiken pituisia äärellisiä polkuja, pelaaja $\exists$ voi valita aina äärettömän polun vastineeksi jonkun riittävän pitkän polun.

Pisteiden n-bisimilaarisuudesta seuraa, että kyseiset pisteet toteuttavat täsmälleen samat modaalilogiikan kaavat. Jos lisäksi oletetaan, että käytettävissä on vain äärellinen määrä propositiosymboleita, myös käänteinen suunta modaalisesta ekvivalenttisuudesta n-bisimilaarisuuteen on voimassa. Tämän todistamisessa voidaan käyttää apuna Hintikka-kaavoja.

Määritelmä 2.10 Olkoon propositiosymboleiden joukko Φ äärellinen, $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ Kripke-malli ja $w \in W$ jokin mallin $\mathcal{M}$ piste. Mallin $\mathcal{M}$ pisteeseen w liittyvä *n-Hintikka-kaava* $\varphi^n_{\mathcal{M},w}$ määritellään induktiivisesti seuraavasti

$$\varphi^0_{\mathcal{M},w} = \bigwedge\{\psi \mid (\psi = p \text{ tai } \psi = \neg p \text{ jollain } p \in \Phi) \text{ ja } \mathcal{M}, w \models \psi\}$$

$$\varphi^{n+1}_{\mathcal{M},w} = \varphi^n_{\mathcal{M},w} \wedge (\bigwedge\{\Diamond\varphi^n_{\mathcal{M},v} \mid (w,v) \in R\} \wedge \Box(\bigvee\{\varphi^n_{\mathcal{M},v} \mid (w,v) \in R\}).$$

Tyhjien disjunktioiden ja konjunktioden varalta määritellään $\bigwedge\{\ \} = \top$ ja $\bigvee\{\ \} = \perp$.

Huomaa, että koska propositiosymboleita on käytössä vain äärellinen määrä, ovat konjunktiot ja disjunktiot edellä äärellisiä, vaikkei tarkasteltava malli olisikaan äärellisesti haarautuva.

Modaalilogiikan kaavan ϕ aste $\deg(\phi)$ määritellään induktiivisesti seuraavien kohtien avulla.

- $\deg(p) = 0$ jokaisella $p \in \Phi$,
- $\deg(\neg\phi) = \deg(\phi)$,
- $\deg(\phi \circ \psi) = \max\{\deg(\phi), \deg(\psi)\}$ jokaisella $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
- $\deg(\Box\phi) = \deg(\Diamond\phi) = \deg(\phi) + 1$

Hintikka-kaavojen määrittelystä nähdään, että jokaisen n-Hintikka-kaavan $\varphi^n_{\mathcal{M},w}$ aste on n.

Propositio 2.7 *Olkoon* Φ *äärellinen,* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *ja* $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ *Kripke-malleja sekä* w *ja* w' *niiden maailmoja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

(i) $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_n \mathcal{M}', w'$,

(ii) $\mathcal{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}', w' \models \phi$ *jokaisella ML-kaavalla* ϕ*, jolla* $\deg(\phi) \leq n$ *(tällöin merkitään* $\mathcal{M}, w \equiv^n_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}', w'$*),*

(iii) $\mathcal{M}', w' \models \varphi^n_{\mathcal{M},w}$.

Todistus. Implikaatioketjuna.

(i) $\Rightarrow$ **(ii)** Osoitetaan induktiolla luvun n suhteen, että

$$\forall w \in W : \forall w' \in W' : ((\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_n \mathcal{M}', w') \Rightarrow (\mathcal{M}, w \equiv^n_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}', w')). \qquad (*)$$

Kun $n = 0$, $(*)$ on voimassa n-bisimilaarisuuden määritelmän nojalla: 0-bisimilaariset pisteet toteuttavat samat propositiosymbolit ja on helppo nähdä, että tällöin sama pätee myös kaikilla niiden boolen kombinaatioilla eli kaikilla astetta 0 olevilla kaavoilla.

Oletetaan, että $(*)$ on voimassa, kun $n = k$, ja oletetaan, että pisteet w ja w' on $(k+1)$-bisimilaarisia. Nyt myös $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_k \mathcal{M}', w'$, joten induktio-oletuksen nojalla w ja w' toteuttavat samat korkeintaan astetta k olevat kaavat.

Tarkastellaan nyt astetta $k + 1$ olevaa kaavaa $\phi = \Diamond\psi$. Oletetaan, että $\mathcal{M}, w \models \phi$. Tällöin on olemassa piste $v \in W$, jolla $(w, v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \models \psi$. Koska pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $G_{k+1}((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$, hän voi valita siirtymää $(w, v) \in R$ vastaavan siirtymän $(w', v') \in R'$ mallista $\mathcal{M}'$. Koska $\exists$ käyttää voittostrategiaansa, on pisteiden v ja v' oltava k-bisimilaarisia, joten induktio-oletuksen mukaan $\mathcal{M}', v' \models \psi$. Tällöin $\mathcal{M}', w' \models \phi$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\mathcal{M}', w' \models \phi \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \phi$. On helppo todeta, että ekvivalenssi on tällöin voimassa myös kaikkien muotoa $\Diamond\psi$ olevien kaavojen boolen kombinaatoilla eli kaikilla astetta $k + 1$ olevilla kaavoilla.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Seuraa suoraan siitä, että $\mathcal{M}, w \models \varphi^n_{\mathcal{M},w}$ ja n-Hintikka-kaavat ovat määritelmänsä mukaan (korkeintaan) astetta n.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)** Osoitetaan induktiolla luvun n suhteen, että

$$\forall w \forall w' : ((\mathcal{M}', w' \models \varphi^n_{\mathcal{M},w}) \Rightarrow (\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_n \mathcal{M}', w')). \qquad (*)$$

0-Hintikka-kaava antaa yksikäsitteisesti (kun propositiosymboleita äärellinen määrä) pisteen propositionaalisen tyypin, joten $(*)$ on voimassa, kun $n = 0$. Oletetaan, että $(*)$ on voimassa, kun $n = k$ ja oletetaan, että $\mathcal{M}', w' \models \varphi^{k+1}_{\mathcal{M},w}$. Tarkastellaan nyt peliä $G_{k+1}((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$. Koska $\mathcal{M}', w' \models \varphi^0_{\mathcal{M},w}$, niin pisteet w ja w' toteuttavat täsmälleen samat propositiosymbolit, eikä peli siis lopu heti alkuunsa.

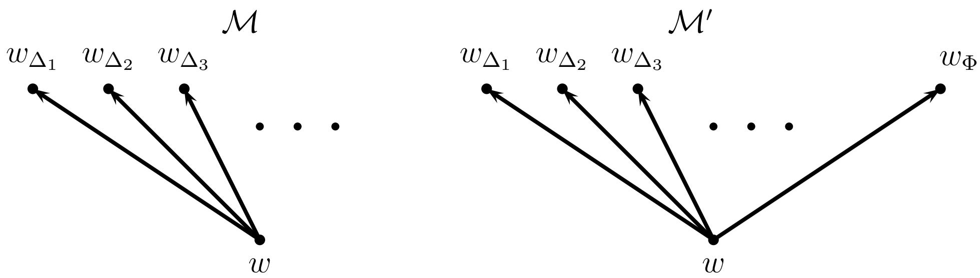
1. Oletetaan, että $\forall$ valitsee siirtymän $(w, v) \in R$. Tällöin oletuksen ja $(k+1)$-Hintikka-kaavan määritelmän nojalla on voimassa $\mathcal{M}', w' \models \Diamond\varphi^k_{\mathcal{M},v}$. Siis on olemassa piste $v' \in W'$, jolla $(w', v') \in R'$ ja $\mathcal{M}', v' \models \varphi^k_{\mathcal{M},v}$. Pelaaja $\exists$ valitsee siirtymän $(w', v') \in R'$ ja induktio-oletuksen mukaan hänellä on voittostrategia loppupelissä.
2. Oletetaan, että $\forall$ valitsee siirtymän $(w', v') \in R'$. Koska $\mathcal{M}', w' \models \Box(\bigvee\{\varphi^k_{\mathcal{M},v} \mid (w, v) \in R\})$ (eikä disjunktio voi olla tyhjä, koska pisteellä w' on seuraaja v'), on jollain siirtymällä $(w, v) \in R$ voimassa $\mathcal{M}', v' \models \varphi^k_{\mathcal{M},v}$. Nyt $\exists$ valitsee tällaisen siirtymän $(w, v) \in R$, jolloin induktio-oletuksen mukaan hänellä on voittostrategia loppupelissä.
3. Mikäli $\forall$ ei voi valita, $\exists$ voittaa pelin.

Kohtien 1–3 nojalla pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä G_{k+1}, joten $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_{k+1} \mathcal{M}', w'$. $\square$

Tämän proposition kohdalla on hyvä huomata, että rajoittuminen perusmodaalilogiikkaan ja äärelliseen propositiosymboleiden joukkoon on siinä mielessä olennaista, että propositio 2.7 ei päde, jos kielen similariteettityypissä τ sallitaan ääretön määrä propositiosymboleita tai modaalioperaattoreita.

Esimerkki 2 Olkoon Φ ääretön propositiosymbolien joukko ja $I = \{\Delta \subseteq \Phi \mid \Delta \text{ äärellinen}\}$. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, missä $W = \{w\} \cup \{w_i \mid i \in I\}$, $R = \{(w, w_i) \mid i \in I\}$ ja $V(p) = \{w_i \mid p \in i\}$ jokaisella $p \in \Phi$. Olkoon $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$, missä $W' = W \cup \{w_\Phi\}$, $R' = R \cup \{(w, w_\Phi)\}$ ja $V'(p) = V(p) \cup \{w_\Phi\}$ jokaisella $p \in \Phi$ (ks. kuva 2). Nyt mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ pisteet w ja w toteuttavat samat modaalilogiikan kaavat (kaavat äärellisiä), mutta eivät ole edes 1-bisimilaarisia ($\forall$ valitsee maailman w_Φ).

Vastaavanlainen esimerkki voidaan konstruoida myös tapauksessa, jossa relaatiosymboleita on käytössä ääretön määrä.



Kuva 2: Esimerkin 2 mallit. Maailmassa w_Δ ovat tosia täsmälleen joukon Δ propositiosymbolit.

3 Klassinen Goldblatt-Thomasonin lause

Esimerkissä 1 nähtiin, että pisteiden ei tarvitse olla bisimilaarisia, vaikka ne toteuttaisivat samat modaalilogiikan kaavat.

Määritelmä 3.1 Malliluokkia M, joilla on voimassa ehto

$$\forall \mathcal{M}, \mathcal{M}' \in M : \forall w, w' : ((\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}', w') \Rightarrow (\mathcal{M}, w \leftrightarroweq \mathcal{M}', w')),$$

kutsutaan *Hennessyn-Milnerin luokiksi* [1, Määritelmä 2.52, s. 92].

Tällaisilla luokilla modaalinen ekvivalenssi on itsessään bisimulaatio, joten kaavoja voidaan tehokkaasti hyödyntää esimerkiksi mallien välisen p-morfismin määrittelyssä.

Yksi esimerkki Hennessyn-Milnerin luokista on m-saturoitujen mallien luokka, jonka määrittelyssä tarvitaan toteutuvuuden käsitettä.

Määritelmä 3.2 Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ Kripke-malli. Kaavajoukko Σ on *toteutuva joukossa* $X \subseteq W$, jos on olemassa joukon X piste, jossa jokainen joukon Σ kaava on tosi. Kaavajoukko on *äärellisesti toteutuva joukossa* X, jos sen jokainen äärellinen osajoukko on toteutuva joukossa X.

Määritelmä 3.3 Malli $\mathcal{M}$ on *m-saturoitu*, jos jokainen äärellisesti sen pisteen w seuraajien joukossa toteutuva kaavajoukko $\Sigma \subseteq \mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$, on myös toteutuva pisteen w seuraajien joukossa.

Propositio 3.1 *Olkoon M luokka m-saturoituja malleja. Tällöin M on Hennessyn-Milnerin luokka.*

Todistus [1, Proposition 2.54 todistus, s. 93]. Olkoot $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ ja $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ m-saturoituja malleja. Osoitetaan, että relaatio $Z = \{(w, w') \in W \times W' \mid \mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}', w'\}$ on bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä.

(i) Jos $(w, w') \in Z$, niin w ja w' toteuttavat samat kaavat, joten ne toteuttavat myös samat propositiosymbolit.

(ii) Oletetaan, että $(w, w') \in Z$ ja $(w, v) \in R$. Olkoon Σ pisteen v modaalinen tyyppi $\{\varphi \in \mathrm{ML}[\Phi, \tau_0] \mid \mathcal{M}, v \models \varphi\}$. Nyt jokaisella äärellisellä osajoukolla $\delta \subseteq \Sigma$ on voimassa $\mathcal{M}, w \models \Diamond(\bigwedge \delta)$, joten oletuksen mukaan myös $\mathcal{M}', w' \models \Diamond(\bigwedge \delta)$. Siispä Σ on äärellisesti toteutuva pisteen w' seuraajien joukossa. Koska $\mathcal{M}'$ on m-saturoitu malli, seuraa tästä, että on olemassa pisteen w' seuraaja v', jolla $\mathcal{M}', v' \models \Sigma$. Nyt relaation Z määritelmän nojalla $(v, v') \in Z$.

(iii) Tapaus $(w, w') \in Z$ ja $(w', v') \in R'$ on symmetrinen kohdan (ii) kanssa.

Kohtien (i) – (iii) nojalla Z on bisimulaatio. $\square$

Äärellisesti haarautuvien mallien luokka tarjoaa konkreettisemman esimerkin.

Määritelmä 3.4 Malli $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ on *äärellisesti haarautuva* (image-finite), jos kullakin $w \in W$ joukko $\{v \mid (w, v) \in R\}$ on äärellinen.

Lemma 3.1 *Äärellisesti haarautuvat kehykset ovat m-saturoituja.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{M}$ äärellisesti haarautuva malli. Olkoon Σ kaavajoukko, joka on äärellisesti toteutuva mallin $\mathcal{M}$ pisteen w seuraajien $w_1, \ldots, w_n$ joukossa. Jos Σ ei olisi toteutuva pisteen w seuraajien joukossa, olisi jokaisella maailmalla w_i olemassa kaava $\psi_i \in \Sigma$, jolla $\mathcal{M}, w_i \models \neg\psi_i$. Mutta $\{\psi_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ on joukon Σ äärellinen osajoukko, joten se on oletuksen mukaan toteutuva jossain pisteessä w_i. Tämä on ristiriita, joten Σ on toteutuva pisteen w seuraajien joukossa. Siispä malli $\mathcal{M}$ on m-saturoitu. $\square$

M-saturoituja malleja voidaan konstruoida ultrafiltterilaajennusten avulla. Tätä varten tarvitaan ultrafilttereitä.

Määritelmä 3.5 (Ultrafiltterit) Olkoon $W \neq \emptyset$. *W-filtteri* F on joukon $\mathcal{P}(W)$ osajoukko, joka toteuttaa ehdot

(i) $W \in F$,

(ii) $X, Y \in F \Rightarrow X \cap Y \in F$,

(iii) $(X \in F$ ja $X \subseteq Z \subseteq W) \Rightarrow Z \in F$.

W-filtteri F on *aito*, jos $F \neq \mathcal{P}(W)$. *W-ultrafiltteri* U on maksimaalinen aito W-filtteri eli toteuttaa ylläolevien ehtojen lisäksi ehdon

(iv) $X \in U \Leftrightarrow (W \setminus X) \notin U$

jokaisella $X \in \mathcal{P}(W)$ [1, Määritelmä A.12, s. 491].

Yhden alkion w generoimaa ultrafiltteriä $\pi_w = \{X \subseteq W \mid w \in X\}$ kutsutaan *prinsipaaliseksi ultrafiltteriksi* [1, Määritelmä A.15, s. 492]. Hilateoriassa ultrafiltteri vastaa hilan $(\mathcal{P}(W), \subseteq)$ alkufiltteriä [7, s. 41] ja prinsipaalinen ultrafiltteri alkion virittämää pääfiltteriä.

Määritelmä 3.6 (Ultrafiltterilaajennus) [1, Määritelmä 2.57, s. 94] Kehyksen $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ *ultrafiltterilaajennus* $ue\mathcal{F}$ on kehys $\langle Uf(W), R^{ue}\rangle$, missä $Uf(W)$ on W-ultrafilttereiden joukko ja

$$(u, v) \in R^{ue} \Leftrightarrow \forall X \in v : \{w \in W \mid \exists w' \in X : ((w, w') \in R)\} \in u.$$

Koska ultrafiltterilaajennus ei ole konstruktiona yhtä intuitiivinen kuin aiemmat kehyskonstruktiot, lienee paikallaan selventää asiaa yksinkertaisella esimerkillä.

Esimerkki 3 Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, missä $W = \{1, 2\}$ ja $R = \{(1, 2)\}$. Nyt hilan $(\mathcal{P}(W), \subseteq)$ alkufiltterit eli kehyksen $\mathcal{F}$ W-ultrafiltterit ovat $u_1 = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$ ja $u_2 = \{\{1, 2\}, \{2\}\}$. Merkitään $m_R(X) = \{w \in W \mid \exists w' \in X : ((w, w') \in R)\}$ ja tehdään pieni taulukko ultrafiltterikehyksen relaation laskemista helpottamaan. Koska jokaisella $X \in u_2$ joukko $m_R(X) = \{w \in W \mid \exists w' \in X : ((w, w') \in R)\} \in$

X	$X \in u_1$	$X \in u_2$	$m_R(X)$	$m_R(X) \in u_1$	$m_R(X) \in u_2$
$\{1\}$	+	-	$\emptyset$	-	-
$\{2\}$	-	+	$\{1\}$	+	-
$\{1, 2\}$	+	-	$\{1\}$	+	-

u_1, niin $(u_1, u_2) \in R^{ue}$. Vastaavasti koska $\{1\} \in u_1$, mutta $\{w \in W \mid \exists w' \in \{1\} : ((w, w') \in R)\} = \emptyset \notin u_2$, saadaan, että $(u_2, u_1) \notin R^{ue}$. Itseasiassa $ue\mathcal{F}$ on isomorfinen kehyksen $\mathcal{F}$ kanssa.

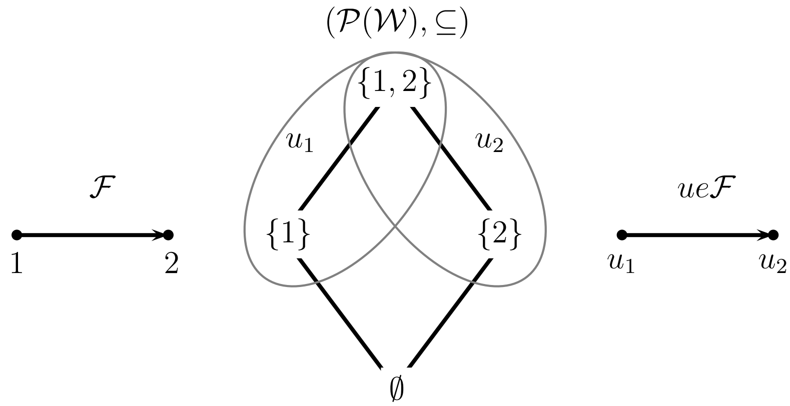
Yleisesti voidaan osoittaa, että äärellisen kehyksen ultrafiltterilaajennus on aina isomorfinen alkuperäisen kehyksen kanssa.

Propositio 3.2 *Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ äärellinen kehys. Tällöin $\mathcal{F} \cong ue\mathcal{F}$.*

Todistus. Valitaan mielivaltainen $u \in Uf(W)$. Koska u on äärellinen ultrafiltteri, on $\bigcap u = \{w\} \in u$ voimassa jollain $w \in W$. Lisäksi $(w, v) \in R \Leftrightarrow \forall X \subseteq W$ joilla $v \in X : w \in \{w \in W \mid \exists v' \in X : (w, v') \in R\} \Leftrightarrow \forall X \in \pi_v : \{w \in W \mid \exists v' \in X : (w, v') \in R\} \in \pi_w \Leftrightarrow (\pi_w, \pi_v) \in R^{ue}$, joten kuvaus $f : \mathcal{F} \to ue\mathcal{F}, f(w) = \pi_w$, on isomorfismi. $\square$

Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti, sillä äärettömillä kehyksillä on myös ei-prinsipaalisia ultrafilttereitä.

Esimerkki 4 [1, Esimerkki 2.58, s. 95] Olkoon kehys $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}, <\rangle$ luonnollisten lukujen järjestys. Prinsipaalisille ultrafilttereille voidaan proposition 3.2 tapaan todeta, että $((w, v) \in <) \Leftrightarrow ((\pi_w, \pi_v) \in <^{ue})$. Lisäksi kehyksellä $\mathcal{N}$ on



Kuva 3: Esimerkin 3 kehykset, osajoukkohila ja sen alkufiltterit

ei-prinsipaalisia ultrafilttereitä. Esimerkiksi kaikkien joukon **N** ko-äärellisten osajoukkojen joukko on aito filtteri, jolla on äärellisen leikkauksen ominaisuus (äärelliset leikkaukset epätyhjiä), joten se voidaan Ultrafiltterilauseen [1, Fact A.14, s. 492] nojalla laajentaa W-ultrafiltteriksi.

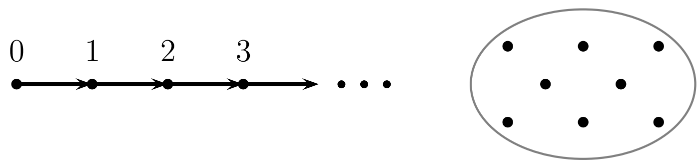
Olkoon v mielivaltainen ei-prinsipaalinen ultrafiltteri. Ei-prinsipaaliset filtterit sisältävät vain äärettömiä joukkoja (ultrafiltterin ehtojen nojalla äärellisestä joukosta voidaan lohkoa paloja, kunnes jäljellä on vain ultrafiltteriin kuuluva yksiö), joten $\forall X \in v : \{w \in \mathbf{N} \mid \exists w' \in X : w < w'\} = \mathbf{N} \in u$. Siispä $(u, v) \in <^{ue}$ aina, kun v on ei-prinsipaalinen ultrafiltteri.

Yleisessä tapauksessa alkuperäinen kehys on siis ultrafiltterilaajennuksen alikehys, mutta ei välttämättä generoitu alikehys.

Voidaan osoittaa, että jos kaava on validi kehyksen $\mathcal{F}$ ultrafiltterilaajennuksessa $ue\mathcal{F}$, niin se on validi myös kehyksessä $\mathcal{F}$ [1, Korollaari 3.16, s. 141]. Jos siis jonkin kehyksen ultrafiltterilaajennus kuuluu modaalisesti määriteltävään kehysluokkaan, täytyy myös alkuperäisen kehyksen kuulua siihen. Tästä saadaan Goldblatt-Thomasonin lauseen neljäs ehto, ultrafiltterilaajennusten heijastaminen.

Määritelmä 3.7 Kehysluokka K *heijastaa ultrafiltterilaajennuksia*, jos se toteuttaa ehdon

$$ue\mathcal{F} \in K \Rightarrow \mathcal{F} \in K.$$



Kuva 4: Kehyksen $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}, < \rangle$ ultrafiltterilaajennus. Relaatio on transitiivinen ja kaikki maailmat ovat relaatiossa ellipsin sisällä olevien pisteiden (ääretön määrä) kanssa.

Kehysluokka ei siis voi olla modaalisesti määriteltävissä ellei se heijasta ultrafiltterilaajennuksia. Esimerkiksi ehdon $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$ toteuttavien kehysten luokka on suljettu erillisten yhdisteiden, generoitujen alimallien ja p-morfisten kuvien suhteen, mutta ei ole modaalisesti määriteltävissä, koska se ei heijasta ultrafiltterilaajennuksia [1, s. 141]. Vastaesimerkiksi käy esimerkiksi luonnollisten lukujen järjestys $(\mathbf{N}, <)$, jonka ultrafiltterilaajennus (ks. esim 4) toteuttaa mainitun ehdon, vaikka kehys itse ei sitä toteuta.

Koska lauseen 3.1 todistuksessa liikutaan myös mallin tasolla, on tarpeen määritellä ultrafiltterilaajennusten käsite myös mallien tasolla.

Määritelmä 3.8 (Mallin ultrafiltterilaajennus) [1, Määritelmä 2.57, s. 94] Mallin $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ ultrafiltterilaajennus $ue\mathcal{M}$ on malli $\langle ue\mathcal{F}, V^{ue} \rangle$, missä $V^{ue}(p_i) = \{u \in Uf(W) \mid V(p_i) \in u\}$.

Havainnollistetaan tätä määritelmää laajentamalla esimerkin 3 kehykset malleiksi.

Esimerkki 3 (jatkoa) Olkoon $\mathcal{F}$ esimerkin 3 kehys ja $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ sen malli, jossa $V(p_i) = \{i\}$ jokaisella $p \in \Phi = \{p_1, p_2\}$. Nyt $V^{ue}(p_1) = \{u \in Uf(W) \mid V(p_1) \in u\} = \{u_1\}$ ja $V^{ue}(p_2) = \{u_2\}$.

Voidaan osoittaa (vrt. [1, Propositio 2.59, s. 96]), että jokaisella kaavalla ϕ ja jokaisella ultrafiltterillä $u \in Uf(W)$ on voimassa $V(\phi) \in u \Leftrightarrow ue\mathcal{M}, u \models \phi$. Lisäksi $ue\mathcal{M}$ on m-saturoitu (vrt. [1, Propositio 2.61, s. 97]) eli jokainen kaavajoukko Σ, joka on äärellisesti toteutuva mallin $ue\mathcal{M}$ pisteen w seuraajien joukossa, on toteutuva pisteen w seuraajien joukossa.

Määritellään vielä ultratulon käsite. Olkoon $I \neq \emptyset$, U I-ultrafiltteri ja $W_i \neq \emptyset$ jokaisella $i \in I$. Funktiot $f, g \in C = \Pi_{i \in I} W_i$ ovat U-ekvivalentit (merkitään $f \sim_U g$), jos $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$. Huomaa, että $\sim_U$ on ekvivalenssirelaatio joukossa C. [1, s. 492].

Määritelmä 3.9 (Joukon ultratulo) [1, A.17, s. 492] Olkoon $f_U = \{g \in C \mid g \sim_U f\}$. *Joukkojen W_i ultratulo modulo U* (merkitään $\Pi_U W_i$) on relaation $\sim_U$ ekvivalenssiluokkien joukko eli

$$\Pi_U W_i = \{f_U \mid f \in \Pi_{i \in I} W_i\}.$$

Määritelmä 3.10 (Mallien ultratulo) *Mallien $\mathcal{M}_i = \langle W_i, R_i, V_i \rangle$ $(i \in I)$ ultratulo $\Pi_U \mathcal{M}_i$ modulo U* on struktuuri $\langle W_U, R_U, V_U \rangle$, missä

(i) $W_U = \Pi_U W_i$,

(ii) $(f_U, g_U) \in R_U \Leftrightarrow \{i \in I \mid (f(i), g(i)) \in R_i\} \in U$ ja

(iii) $f_U \in V_U(p) \Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) \in V_i(p)\} \in U$.

Jos $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}$ jokaisella $i \in I$, puhutaan mallin $\mathcal{M}$ ultrapotenssista. [1, Määritelmä A.18, s. 492-493].

Tätäkin käsitettä lienee paikallaan selventää pienellä esimerkillä.

Esimerkki 5 Olkoon $I = \{a, b\}$, $U = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ I-ultrafiltteri ja $\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_b = \mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ esimerkin 3 malli. Muodostetaan mallin $\mathcal{M}$ ultrapotenssi $\Pi_U \mathcal{M} = \langle W_U, R_U, V_U \rangle$.

Aloitetaan joukon W ultrapotenssilla. Merkitään $W \times W = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} = \{f, f', g, g'\}$. Nyt $f \sim_U f'$, $g \sim_U g'$ ja $f \not\sim g$, joten joukon W ultrapotenssi $\Pi_U W$ on $= \{f_U, g_U\}$. Siis $W_U = \{f_U, g_U\}$. Relaation R_U määrittämistä varten todetaan, että $\{i \in I \mid (f(i), g(i)) \in R\} = \{a\} \in U$ ja $\{i \in I \mid (g(i), f(i)) \in R\} = \emptyset \notin U$, joten $(f_U, g_U) \in R_U$ ja $(g_U, f_U) \notin R_U$. Vastaavasti voidaan todeta, että $(f_U, f_U) \notin R_U$ ja $(g_U, g_U) \notin R_U$. Valuaatiota V_U varten $\{i \in I \mid f(i) \in V(p_1)\} = \{a, b\} \in U$, $\{i \in I \mid f(i) \in V(p_2)\} = \emptyset \notin U$ ja $\{i \in I \mid g(i) \in V(p_1)\} = \{b\} \notin U$, $\{i \in I \mid g(i) \in V(p_2)\} = \{a\} \in U$, joten $V_U(p_1) = \{f_U\}$ ja $V_U(p_2) = \{g_U\}$. Tarkkasilmäinen lukija huomannee, että tässä tapauksessa mallin $\mathcal{M}$ ultrapotenssi on isomorfinen alkuperäisen mallin kanssa.

Vaikka alla olevan lauseen 3.1 muotoilussa ei eksplisiittisesti puhuta ultratuloista, ovat ne kuitenkin sisäänrakennettuna elementaarisuusoletukseen, sillä malliteorian tuloksista (vrt. [4, Lause 4.1.12, s. 220]) seuraa, että elementaariset luokat ovat suljettuja myös ultratulojen suhteen. Näillä eväillä voidaan siirtyä Goldblatt-Thomasonin lauseen täsmälliseen muotoiluun ja todistamiseen.

Lause 3.1 (Goldblatt-Thomason) *Elementaarinen kehysluokka K on modaalisesti määriteltävissä täsmälleen silloin, kun se on suljettu p-morfisten kuvien, generoitujen alikehysten ja erillisten yhdisteiden suhteen sekä heijastaa ultrafiltterilaajennuksia.*

Todistus (vrt. [1], s. 179 – 181). Olkoon $\Phi = \{p_0, p_1, \ldots\}$ ja K elementaarinen kehysluokka. Jos K on modaalisesti määriteltävissä, niin aiempien toteamuksien perusteella se toteuttaa mainitut sulkeumaehdot.

Oletetaan sitten, että K on suljettu p-morfisten kuvien, generoitujen alikehysten ja erillisten yhdisteiden suhteen sekä heijastaa ultrafiltterilaajennuksia. Olkoon $\Lambda_K = \{\phi \mid \mathcal{F} \models \phi$ jokaisella $\mathcal{F} \in K\}$.

Osoitetaan, että Λ_K määrittelee (modaalisesti) kehysluokan K. Selvästi implikaatio $\mathcal{F} \in K \Rightarrow \mathcal{F} \models \Lambda_K$ on voimassa, joten riittää osoittaa, että jokaisella kehyksellä $\mathcal{F}$, jolla $\mathcal{F} \models \Lambda_K$, on voimassa $\mathcal{F} \in K$.

Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ kehys, jolla $\mathcal{F} \models \Lambda_K$. Koska proposition 2.6 mukaan jokainen kehys saadaan (piste)generoitujen alikehystensä erillisen yhdisteen p-morfisena kuvana ja K on suljettu mainittujen operaatioiden suhteen, voidaan olettaa, että $\mathcal{F}$ on pisteen $w \in W$ generoima.

Kiinnitetään propositiosymboleiden joukoksi $\Phi' = \{p_A \mid A \subseteq W\}$. Olkoon $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, missä $V(p_A) = A$ kullakin $p_A \in \Phi'$. Tarkastellaan pisteen w modaalista tyyppiä $\Delta = \{\phi \in \mathrm{ML}[\Phi', \tau_0] \mid M, w \models \phi\}$ ja osoitetaan, että se on äärellisesti toteutuva luokassa K.

Valitaan äärellinen $\delta \subseteq \Delta$. Jos δ ei olisi toteutuva luokassa K, olisi $\neg(\bigwedge \delta)$ validi luokassa K. Koska δ on äärellinen joukko äärellisiä kaavoja, on olemassa kaavajoukko $\delta' \subseteq \mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$, joka on saatu kaavajoukosta δ korvaamalla yhdenmukaisesti jokainen p_A jollain (erisuurella) p_i. Tällöin myös $\neg(\bigwedge \delta')$ olisi validi luokassa K, joten $\neg(\bigwedge \delta') \in \Lambda_K$ ja $\mathcal{F} \models \neg(\bigwedge \delta')$. Koska δ' on saatu universaalilla substituutiolla joukosta δ, $\mathcal{F} \models \neg \bigwedge \delta$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä $\mathcal{M}$ on kehyksen $\mathcal{F}$ malli, jolla $\mathcal{M} \models \bigwedge \delta$. Siispä δ on toteutuva luokassa K.

Olkoon $I = \{\delta \subseteq \Delta \mid \delta$ äärellinen $\}$. Edellä todetun perusteella jokaisella $\delta \in I$ on olemassa (pisteen v_δ generoima) malli $N_\delta = \langle W_\delta, R_\delta, V_\delta \rangle$, jolla $\langle W_\delta, R_\delta \rangle \in K$ ja $N_\delta, v_\delta \models \delta$. Merkitään $\hat{\sigma} = \{\delta \in I \mid \sigma \in \delta\}$ jokaisella $\sigma \in \Delta$. Nyt joukolla $E = \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Delta\}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus (äärelliset leikkaukset epätyhjiä, koska $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \in \hat{\sigma_1} \cap \ldots \cap \hat{\sigma_n}$), joten ultrafiltterilauseen [1, Fact A.14, s. 492] mukaan se voidaan laajentaa I-ultrafiltteriksi U.

Olkoon $\mathcal{N} = \Pi_U N_\delta$ ja $f \in \Pi_{\delta \in I} W_\delta$ kuvaus, jolla $f(\delta) = v_\delta$. Nyt $\{\delta \in I \mid N_\delta, v_\delta \models \sigma\} \in U$ jokaisella $\sigma \in \Delta$, joten Łośin lauseen [1, Lause A.19, s. 493] mukaan $\mathcal{N}, f_U \models \Delta$. Koska luokka K on (elementaarisuutensa vuoksi) suljettu ultratulojen suhteen, mallin $\mathcal{N}$ kehys $\mathcal{G} = \langle X, S\rangle \in K$. Edelleen koska K on suljettu generoitujen alikehysten suhteen, voidaan olettaa, että $\mathcal{G}$ on pisteen $b = f_U$ generoima. Koska K on suljettu ultrapotenssiensa p-morfisten kuvien suhteen ja heijastaa ultrafiltterilaajennuksia, todistuksen loppuun saattamiseksi riittää osoittaa, että kehyksen $\mathcal{F}$ ultrafiltterilaajennus $ue\mathcal{F}$ on kehyksen $\mathcal{G}$ jonkin ultrapotenssin p-morfinen kuva.

Malliteorian tuloksista (vrt. [4], lauseet 6.1.4 ja 6.1.8) seuraa (standardikäännöstä [1, Luku 2.4] hyväksi käyttämällä), että on olemassa numeroituvasti saturoitu mallin $\mathcal{N}$ ultrapotenssi $\mathcal{N}' = \langle X', S', U'\rangle$, jonka kehys $\langle X', S'\rangle \in K$ (K on elementaarisena luokkana suljettu ultrapotenssien suhteen). Nyt jokainen mallissa $\mathcal{N}'$ äärellisesti toteutuva kaavajoukko Σ on toteutuva mallissa $\mathcal{N}'$ ja lisäksi $\mathcal{N}'$ on m-saturoitu (vrt. [1], lause 2.65).

Määritellään jokaisella $s \in X'$:

$$f(s) = \{A \subseteq W \mid \mathcal{N}', s \models p_A\}$$

ja osoitetaan, että f on surjektiivinen p-morfismi $X' \to Uf(W)$. Tämän osoittamiseksi on hyödyllistä todeta, että

$$\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{N}' \models \phi \tag{2}$$

pätee aina, kun $\phi \in \mathrm{ML}[\Phi, \tau]$ (vrt. [1, s. 180]).

Osoitetaan aluksi, että f on kuvaus mainittujen mallien välillä eli $f(s) \in Uf(W)$ jokaisella määrittelyjoukon alkiolla s. Valitaan mielivaltainen $s \in X'$.

(i) Mallin $\mathcal{M}$ määritelmän nojalla $\mathcal{M} \models p_W$. Siispä ekvivalenssin 2 nojalla $\mathcal{N}' \models p_W$, joten erityisesti $\mathcal{N}', s \models p_W$ ja siis $W \in f(s)$.

(ii) Oletetaan, että $A, B \in f(s)$. Joukon $f(s)$ määritelmän nojalla $\mathcal{N}', s \models p_A \wedge p_B$. On helppo todeta, että $\mathcal{M} \models p_A \wedge p_B \leftrightarrow p_{A\cap B}$, joten ekvivalenssin 2 nojalla $\mathcal{N}', s \models p_{A\cap B}$ eli $A \cap B \in f(s)$.

(iii) Oletetaan, että $A \in f(s)$ ja $A \subseteq B \subseteq W$. Joukon $f(s)$ määritelmän nojalla $\mathcal{N}', s \models p_A$. Koska $\mathcal{M} \models p_A \to p_B$, kun $A \subseteq B$, saadaan edellisen kohdan tapaan $B \in f(s)$.

(iv) Olkoon $A \in \mathcal{P}(W)$. On suoraviivaista osoittaa, että tällöin $\mathcal{N}', s \models p_A \Leftrightarrow \mathcal{N}', s \not\models p_{W\setminus A}$ eli $A \in f(s) \Leftrightarrow W \setminus A \notin f(s)$.

Kohtien (i)-(iv) nojalla $f(s)$ on W-ultrafiltteri.

Osoitetaan sitten, että kuvaus f on p-morfismi (eli on bisimulaatio). Koska $ue\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}'$ ovat m-saturoituja malleja, riittää (proposition 3.1 nojalla) osoittaa, että pisteet $u \in Uf(W)$ ja $s \in X'$ ovat modaalisesti ekvivalentit täsmälleen silloin, kun $f(s) = u$. (Tällöin modaalinen ekvivalenttisuusrelaatio on yhtenevä kuvauksen f kanssa ja mainitun proposition nojalla kyseinen relaatio on bisimulaatio.)

(i) Jos u ja s ovat modaalisesti ekvivalentit, niin jokaisella $A \subseteq W$ pätee, että $\mathcal{N}', s \models p_A \Leftrightarrow ue\mathcal{M}, u \models p_A$. Koska mallin $ue\mathcal{M}$ valuaation määritelmän nojalla on voimassa, että $ueM, u \models p_A \Leftrightarrow A = V(p_A) \in u$, niin $f(s) = \{A \subseteq W \mid \mathcal{N}', s \models p_A\} = \{A \subseteq W \mid A \in u\} = u$.

(ii) Oletetaan sitten, että $f(s) = u$ ja $\phi \in \mathrm{ML}[\Phi, \tau]$. Tällöin $ue\mathcal{M}, u \models \phi \Leftrightarrow ue\mathcal{M}, f(s) \models \phi \Leftrightarrow V(\phi) \in f(s) \Leftrightarrow \mathcal{N}', s \models p_{V(\phi)}$. Koska $\mathcal{M} \models \phi \leftrightarrow p_{V(\phi)}$, saadaan ekvivalenssin (2) nojalla $\mathcal{N}', s \models p_{V(\phi)} \Leftrightarrow \mathcal{N}', s \models \phi$, joten (ekvivalenssiketjut yhdistämällä) u ja s ovat modaalisesti ekvivalentit.

Näin on osoitettu, että f on p-morfismi.

Osoitetaan lopuksi, että f on surjektio. Olkoon $u \in Uf(W)$. Osoitetaan, että joukko $\Sigma = \{p_A \mid A \in u\}$ on äärellisesti toteutuva mallissa $\mathcal{N}'$. Olkoon $\sigma = \{p_{A_1}, \ldots, p_{A_n}\} \subseteq \Sigma$. Koska u on ultrafiltteri, $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$, joten $\exists w_\sigma : \mathcal{M}, w_\sigma \models p_{A_1} \wedge \ldots \wedge p_{A_n}$. Siispä σ on toteutuva mallissa $\mathcal{M}$. Koska $\mathcal{M}$ on pisteen w generoima, jollain $n \in \mathbf{N}$ on voimassa $\mathcal{M}, w \models \Diamond^n(\bigwedge \sigma)$. Siispä $\Diamond^n(\bigwedge \sigma) \in \Delta$, joten $\mathcal{N}, b \models \Diamond^n(\bigwedge \sigma)$ eli σ on toteutuva mallissa $\mathcal{N}$. Koska $\mathcal{N}'$ on mallin $\mathcal{N}$ ultrapotenssi, on σ on toteutuva myös mallissa $\mathcal{N}'$. Nyt Σ on äärellisesti toteutuva mallissa $\mathcal{N}'$. Koska $\mathcal{N}'$ on numeroituvasti saturoitu, on Σ on toteutuva mallin $\mathcal{N}'$ jossain pisteessa s' eli $\mathcal{N}', s' \models \Sigma$. Nyt jokaisella $A \in u$ on voimassa $A \in f(s')$ eli $u \subseteq f(s')$. Jos $A \notin u$, niin $W \setminus A \in u$ (u on ultrafiltteri). Tällöin $W \setminus A \in f(s')$, joten koska myös $f(s')$ on ultrafiltteri $A \notin f(s')$. Siispä myös $f(s') \subseteq u$, joten $f(s') = u$. Näin on osoitettu, että $\forall u \in Uf(W) : \exists s' \in X' : f(s') = u$, joten f on surjektio ja $ue\mathcal{F}$ on jonkun kehyksen $\mathcal{G}$ ultrapotenssin p-morfinen kuva. □

4 Kompaktisuus

Elementaarisuusoletusta ja ultrafiltterilaajennuksia tarvittiin Goldblatt-Thomasonin lauseessa olennaisesti kahdessa kohdassa. Ensinnäkin elementaarisuudesta saatiin malli (ultratulo) ja sen piste, jossa (äärellisen toteutuvuuden kautta) saatiin toteutettua kokonaan alkuperäisen mallin pisteen modaalinen tyyppi. Tätä varten riittäisi kompaktisuusoletus. Toiseksi elementaarisuuden (ultrapotenssin) ja ultrafiltterilaajennusten avulla saatiin kaksi m-saturoitua kehystä, joiden välillä modaalinen kaavaekvivalenssi on suoraan bisimulaatio. Tämä vastaa rajoittumaa Hennessyn-Milnerin luokkiin. Käyttämällä erottelevaa mallia, jossa eroteltiin alkuperäisen kehyksen kaikki mahdolliset osajoukot, taattiin lisäksi, että kaavaekvivalenssista muodostettu bisimulaatio on itseasiassa surjektiivinen kuvaus eli p-morfismi. Tarkastellaan seuraavaksi, miten näiden havaintojen kautta voidaan lähteä muokkaamaan alkuperäistä Goldblatt-Thomasonin lausetta.

Ensimmäinen askel on siirtyä elementaarisuusoletuksesta kompaktisuusoletukseen. Koska jatkossa ollaan kiinnostuneita muistakin modaalilogiikoista, määritellään kompaktisuus yleisesti kielen $\mathcal{L}$ suhteen.

Määritelmä 4.1 ($\mathcal{L}$-kompaktisuus) Olkoon $\mathcal{L}$ tarkasteltavan (modaali)logiikan kieli. Kehysluokka K on *$\mathcal{L}$-kompakti*[3], jos jokainen äärellisesti luokassa K toteutuva $\mathcal{L}$-kaavojen joukko on myös toteutuva (tosi jonkun kehyksen mallin jossain pisteessä) luokassa K.

Standardikäännöksen avulla voidaan osoittaa, että elementaariset kehysluokat ovat kompakteja.

Lause 4.1 *Elementaariset kehysluokat ovat* ML$[\Phi, \tau_0]$*-kompakteja.*

Todistus. Olkoon K elementaarinen kehysluokka ja Δ äärellisesti luokassa K toteutuva ML$[\Phi, \tau_0]$-kaavojen joukko. Olkoon $\mathcal{A} = \{P_p \mid p \in \Phi\} \cup \{R\} \cup \{c\}$ tarkasteltavaa modaalilogiikan similariteettityyppiä vastaava ensimmäisen kertaluvun logiikan aakkosto, johon on lisätty yksi vakiosymboli c ja olkoon $T_\Delta = \{ST_c(\varphi) \mid \varphi \in \Delta\}$ joukon Δ kaavojen standardikäännöksiä (määritelmä 2.6) vastaava ensimmäisen kertaluvun logiikan teoria.

Koska K on elementaarinen kehysluokka, on olemassa aakkoston $\mathcal{A}$ teoria T, jolla $K = Mod(T)$. Nyt $T \cup T_\Delta$ on aakkoston $\mathcal{A}$ teoria. Osoitetaan, että jokaisella äärellisellä $T_0 \subseteq T \cup T_\Delta$ on olemassa $\mathcal{A}$-malli M_0, jolla $M_0 \models T_0$.

[3]Huomaa, että kompaktisuus voidaan määritellä myös abstraktissa kontekstissa logiikan $S = \langle \mathcal{L}, M, \models \rangle$ suhteen (katso esimerkiksi [5, Määritelmä 1.1.2, s. 2]).

Olkoon $T_0 \subseteq T \cup T_\Delta$ äärellinen. Merkitään $\delta = T_0 \cap T_\Delta$ ja olkoon $\delta_{ML} = \{\varphi \in \mathrm{ML}[\Phi, \tau_0] \mid ST_c(\varphi) \in \delta\}$. Nyt $\delta_{ML} \subseteq \Delta$ on äärellinen, joten oletuksen mukaan on olemassa kehys $\langle W, R\rangle \in K$, valuaatio V ja piste $w \in W$, joilla

$$\langle W, R, V\rangle, w \models \bigwedge \delta_{ML}.$$

Tällöin standardikäännöksen ominaisuuksien [1, Propositio 2.47, s. 85] nojalla

$$M_0 = (W, R, (V(p))_{p\in\Phi}, w) \models \bigwedge \delta.$$

Lisäksi $\langle W, R\rangle \in K$, joten $M_0 \models T$. Siispä $M_0 \models T \cup \delta$ eli $M_0 \models T_0$.

Koska teoria $T \cup T_\Delta$ on äärellisesti toteutuva, on se predikaattilogiikan kompaktisuuslauseen nojalla toteutuva jossain aakkoston $\mathcal{A}$ mallissa $M = (W, R^W, (P^W)_{p\in\Phi}, c^W)$. Nyt erityisesti $(W, R^W) \models T$, joten $(W, R^W) \in K$. Lisäksi koska $M \models T_\Delta$, saadaan

$$\langle W, R, V\rangle, w \models \Delta,$$

missä $R = R^W$, $w = c^W$ ja $V(p) = P^W$, kun $p \in \Phi$. $\square$

Esimerkki 6 Lauseen 4.1 nojalla esimerkiksi irrefleksiivisten ja transitiivisten kehysten luokat ovat $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$-kompakteja.

Esimerkki 7 Olkoon $\Phi = \{p_i \mid i \in \mathbf{N}\}$. Äärellisten kehysten luokka K_{fin} ei ole $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$-kompakti, sillä kaavajoukko $\{\Diamond^n(p_n \wedge \bigwedge_{i<n} \neg p_i) \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{\Box^n(p_n \wedge \bigwedge_{i<n} \neg p_i) \mid n \in \mathbf{N}\}$ on äärellisesti toteutuva luokassa K_{fin}, mutta ei ole kokonaisuudessaan toteutuva missään äärellisessä kehyksessä. Lauseen 4.1 nojalla tämä luokka ei siis ole myöskään määriteltävissä predikaattilogiikassa.

Kompaktisuuden lisäksi tarvitaan vielä jokin tapa, jolla taataan, että tarkasteltava kehys saadaan määriteltävän kehysluokan jonkin kehyksen p-morfisena kuvana. Jos oletetaan, että tämä voidaan tehdä sopivalla kaavajoukolla, saadaan seuraava lause.

Lause 4.2 *Oletetaan, että jokaista luokan C kehystä $\mathcal{F}$ ja sen pistettä w kohti on olemassa logiikan $\mathcal{L}$ kaavajoukko $\Delta_{\mathcal{F},w}$, joka toteutuu pisteessä w, ja jos se toteutuu kehyksen $\mathcal{G}$ jossain pisteessä v, niin $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva. Olkoon K $\mathcal{L}$-kompakti kehysluokka, joka on suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen. Tällöin K on $\mathcal{L}$-määriteltävissä luokan C suhteen (Λ_K määrittelee luokan K).*

Todistus. Olkoon K $\mathcal{L}$-kompakti kehysluokka, joka on suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen. Olkoon $\Lambda_K = \{\phi \in \mathcal{L} \mid \mathcal{F} \models \phi$ jokaisella $\mathcal{F} \in K\}$. Selvästi $\mathcal{F} \in K \Rightarrow \mathcal{F} \models \Lambda_K$. Olkoon $\mathcal{F}$ luokan C kehys, jolla $\mathcal{F} \models \Lambda_K$. Koska jokainen kehys saadaan pistegeneroitujen kehystensä erillisen yhdisteen p-morfisena kuvana (Propositio 2.6) ja luokka K on suljettu näiden operaatioiden suhteen, riittää tarkastella pistegeneroituja kehyksiä. Voidaan siis olettaa, että $\mathcal{F}$ on pisteen w generoima. Nyt jokaista äärellistä joukkoa $\delta \subseteq \Delta_{\mathcal{F},w}$ kohti on olemassa luokan K kehys $\mathcal{G}_\delta$, joka toteuttaa kaavan $\bigwedge \delta$ pisteessään v_δ (muutoin olisi $K \models \neg(\bigwedge \delta)$ voimassa, mistä seuraisi, että $\mathcal{F} \models \neg(\bigwedge \delta)$, mikä on ristiriita sillä $\Delta_{\mathcal{F},w}$, erityisesti siis myös $\bigwedge \delta$, toteutuu kehyksen $\mathcal{F}$ pisteessä w). Koska K on kompakti kehysluokka, on olemassa kehys $\mathcal{G} \in K$, joka toteuttaa kaavajoukon $\Delta_{\mathcal{F},w}$ pisteessään v. Nyt oletuksen mukaan $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva, joten luokan K sulkeumaehtojen nojalla $\mathcal{F} \in K$. $\square$

Tavallisen modaalilogiikan kaavojen validisuus säilyy generoiduissa alimalleissa, erillisissä yhdisteissä ja p-morfisissa kuvissa, joten tällöin määriteltävyydestä seuraa suoraan sulkeuma näiden ehtojen suhteen. On siis luontevaa aloittaa jatkotarkastelut pohtimalla, millaisilla ehdoilla sopiva kaavajoukko $\Delta_{\mathcal{F},w}$ löydetään, kun käytössä on tavallisen modaalilogiikan kieli.

Goldblatt-Thomasonin lauseessa sopiva kaavajoukko löytyi tarkasteltavan kehyksen erottelevan mallin juuren modaalisesta tyypistä. Proposition 2.7 nojalla vastaava asia voidaan tehdä n-Hintikka-kaavojen avulla, mikäli voidaan olettaa propositiosymboleiden joukon olevan äärellinen. Tällainen oletus voidaan tehdä, jos rajoitutaan äärellisesti haarautuvien kehysten luokkaan, sillä tällöin kehyksen pisteiden erotteluun syvyyteen n asti riittää äärellinen propositiosymboleiden joukko. Määritellään tätä varten mallien ja kehysten n-rajoittumat.

Määritelmä 4.2 Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ Kripke-kehys. Pisteen $w \in W$ *n-ympäristö* $H_n(w)$ (n-hull [11, s. 6]) määritellään rekursiivisesti kohtien

$$H_0(w) := \{w\},\ H_{n+1}(w) := \{u \in W \mid \exists v \in H_n(w) : (v, u) \in R\}$$

avulla. Kehyksen $\mathcal{F}$ *n-rajoittuma* $\mathcal{F}_{w,n}$ suhteessa pisteeseen w on struktuuri $\langle W_n, R_n\rangle$, missä $W_n = \bigcup_{0\leq i\leq n} H_i(w)$ ja $R_n = R \cap (W_n \times W_n)$. Mallin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ n-rajoittuma $\mathcal{M}_{w,n}$ suhteessa pisteeseen w on vastaavasti struktuuri $\langle W_n, R_n, V_n\rangle$, missä $V_n(p) = V(p) \cap W_n$.

Äärellisesti haarautuvien kehysten tapauksessa, näille n-rajoittumille voidaan määritellä sopivasti erottelevat Hintikka-kaavat seuraavasti.

Määritelmä 4.3 Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ äärellisesti haarautuva kehys, $w \in W$ sen piste ja $n \in \mathbf{N}$. Kehyksen $\mathcal{F}$ erotteleva malli $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ on struktuuri $\langle \mathcal{F}, V\rangle$, missä $V(p_v) = \{v\}$, kun $p_v \in \Phi' = \{p_v \mid v \in \mathcal{F}\}$. Olkoon $\mathcal{N}$ mallin $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ n-rajoittuma suhteessa pisteeseen w ja $\Phi = \{p_v \mid v \in \mathcal{F}_{w,n}\}$[4]. Määritellään Hintikka-kaava $\varphi^n_{\mathcal{F},w} = \varphi^n_{\mathcal{N},w}$, missä $\varphi^n_{\mathcal{N},w}$ on mallin $\mathcal{N}$ pisteeseen w liittyvä n-Hintikka-kaava (ks. määritelmä 2.10).

Lemma 4.1 *Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ äärellisesti haarautuva kehys, $w \in W$ sen piste ja $\Delta_{\mathcal{F},w} = \{\varphi^n_{\mathcal{F},w} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Olkoon $\mathcal{G}$ kehys ja v sen piste, joka toteuttaa joukon $\Delta_{\mathcal{F},w}$. Tällöin $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{N} = \langle W_N, R_N, V_N\rangle$ kehyksen $\mathcal{G}_v$ malli, jonka pisteellä $v \in W_N$ on voimassa $\mathcal{N}, v \models \Delta_{\mathcal{F},w}$. Nyt jokaisella n on voimassa

$$\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w \leftrightarroweq_n \mathcal{M}^{\mathcal{F}}_{w,n}, w \leftrightarroweq_n \mathcal{N}, v,$$

missä $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ on kehyksen $\mathcal{F}$ erotteleva malli ja $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}_{w,n}$ sen n-rajoittuma suhteessa pisteeseen w. Siispä mallin $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ piste w ja mallin $\mathcal{N}$ piste v toteuttavat samat modaalilogiikan kaavat.

Osoitetaan, että jokaista mallin $\mathcal{N}$ pistettä v' kohti on olemassa mallin $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}_w$ piste w', joka toteuttaa täsmälleen samat modaalilogiikan kaavat. Valitaan mielivaltainen mallin $\mathcal{N}$ piste v'. Koska $\mathcal{N}$ on pisteen v generoima, on olemassa R_N-polku pisteestä v pisteeseen v'. Merkitään tämän polun pituutta luvulla m. Tarkastellaan nyt peliä $G_{m+n}((\mathcal{N}, v), (\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w))$, jossa pelaaja $\forall$ pelaa ensimmäiset m siirtoaan polkua $v \dots v'$ pitkin. Koska $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w \leftrightarroweq_n \mathcal{N}, v$ on voimassa jokaisella n, pelaajalla $\exists$ on voittostrategia tässä pelissä jokaisella n. Koska $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ on äärellisesti haarautuva malli, on olemassa mallin $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ sellainen piste w', että pelaajan $\exists$ voittostrategian mukainen vastine pisteelle v' on w' mielivaltaisen suurilla luvun n arvoilla. Valitaan tällainen $w' \in W$. Nyt pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $G_n((\mathcal{N}, v'), (\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w'))$, joten pisteet v' ja w' ovat n-bisimilaariset jokaisella n ja näin ollen toteuttavat täsmälleen samat modaalilogiikan kaavat.

Määritellään relaatio $f = \{(v', w') \in W_N \times W_{\mathcal{F}_w} \mid v'$ ja w' toteuttavat täsmälleen samat modaalilogiikan kaavat$\}$ ja osoitetaan, että f on surjektiivinen p-morfismi. Edellä todetun perusteella jokaisella $v' \in W_N$ on olemassa kehyksen $\mathcal{F}_w$ piste w', jolla $(v', w') \in f$. Koska $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ on erotteleva malli, tämä kuva $f(v') = w'$ on yksikäsitteinen.

[4] Huomaa, että koska $\mathcal{F}$ on äärellisesti haarautuva kehys, Φ on äärellinen ja Hintikka-kaavat voidaan määritellä ilman äärettömiä disjunktioita ja konjunktioita.

Osoitetaan sitten, että f on surjektio. Valitaan mielivaltainen $w_1 \in W_{\mathcal{F}_w}$. Nyt $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w_1 \models p_{w_1}$ ja on olemassa polku pisteestä w pisteeseen w_1. Siispä $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w \models \Diamond^n p_{w_1}$ jollain $n \in \mathbf{N}$. Koska pisteet w ja v toteuttavat samat kaavat, $\mathcal{N}, v \models \Diamond^n p_{w_1}$. Siispä on olemassa mallin $\mathcal{N}$ piste v_1, jolla $\mathcal{N}, v_1 \models p_{w_1}$. Koska f on kuvaus, on olemassa kehyksen $\mathcal{F}_w$ piste w_2, jolla $f(v_1) = w_2$. Koska $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ on erotteleva malli ja kuvauksen f vastinpisteet toteuttavat samat kaavat, on oltava $w_2 = w_1$. Siispä f on surjektio.

Osoitetaan vielä, että f on bisimulaatio.

(ii) Oletetaan, että $(v_1, w_1) \in f$ ja $(v_1, v_2) \in R_N$. Koska f on kuvaus, on olemassa $w_2 \in W_{\mathcal{F}_w}$, jolla $f(v_2) = w_2$. Koska $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w_2 \models p_{w_2}$ ja pisteet v_2, w_2 toteuttavat samat kaavat, $\mathcal{N}, v_2 \models p_{w_2}$. Nyt $\mathcal{N}, v_1 \models \Diamond p_{w_2}$ ja siis $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w_1 \models \Diamond p_{w_2}$. Nyt on olemassa $w_3 \in W$, jolla $(w_1, w_3) \in R$ ja $w_3 \models p_{w_2}$. Koska $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ on erotteleva malli täytyy pisteiden w_2 ja w_3 olla identtiset.

(iii) Oletetaan sitten, että $(v_1, w_1) \in f$ ja $(w_1, w_2) \in R$. Koska $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w_2 \models p_{w_2}$, $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}, w_1 \models \Diamond p_{w_2}$. Siispä $\mathcal{N}, v_1 \models \Diamond p_{w_2}$. Nyt on olemassa $v_2 \in W_N$, jolla $(v_1, v_2) \in R_N$ ja $v_2 \models p_{w_2}$. Koska f on kuvaus, on olemassa piste $w_3 \in W_{\mathcal{F}_w}$, jolla $f(v_2) = w_3$. Nyt $w_3 \models p_{w_2}$, joten koska $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ on erotteleva malli, on oltava $w_3 = w_2$.

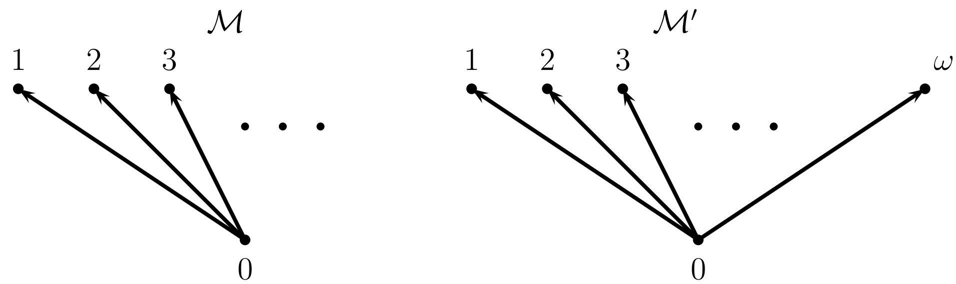
Kohtien (ii) ja (iii) nojalla f on bisimulaatio kehysten $\mathcal{F}_w$ ja $\mathcal{G}_v$ välillä. Näin on osoitettu, että kehys $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva. □

Lisäksi $\Delta_{\mathcal{F},w}$ on toteutuva kehyksen $\mathcal{F}$ pisteessä w, joten lauseesta 4.2 ja lemmasta 4.1 yhdessä aiemmin todettujen perustulosten kanssa saadaan seurauslause.

Seuraus 4.3 *Olkoon Φ (vähintään) numeroituvasti ääretön propositiosymboleiden joukko. Kompakti kehysluokka on* $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$*-määriteltävissä*[5] *suhteessa äärellisesti haarautuvien kehysten luokkaan täsmälleen silloin, kun se on suljettu generoitujen alikehysten, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen.*

Huomautus 1 Olkoon $\Phi = \{p_i \mid i \in \mathbf{N}\}$. Äärellisesti haarautuvien kehysten luokka K_{imfi} ei ole $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$-kompakti, sillä kaavajoukko $\{\Diamond(p_n \wedge \bigwedge_{i<n} \neg p_i) \mid n \in \mathbf{N}\}$ on äärellisesti toteutuva luokassa K_{imfi}, mutta ei ole kokonaisuudessaan

[5] Tarkkaan ottaen tässä pitää vielä kääntää Hintikka-kaavojen joukon $\Delta_{\mathcal{F},w}$ kaavat $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$-kaavoiksi, mutta koska kaavajoukko $\Delta_{\mathcal{F},w}$ on korkeintaan numeroituva, se voidaan tehdä korvaamalla joukon $\Delta_{\mathcal{F},w}$ kaavojen propositiosymbolit yhdenmukaisesti joukon Φ symboleilla.



Kuva 5: Esimerkin 8 mallit. Maailmassa i ovat tosia ne propositiosymbolit p_k, joilla $k \leq i$.

toteutuva missään äärellisesti haarautuvassa kehyksessä. Lauseen 4.1 nojalla tämä luokka ei siis ole myöskään määriteltävissä predikaattilogiikassa.

Äärellisestä haarautuvuudesta voisi pyrkiä eroon yrittämällä yleistää Hintikka-kaavoja numeroituville malleille ja numeroituvalla propositiosymboleiden joukolle $\Phi = \{p_i \mid i \in \mathbf{N}\}$. Tällaiset m, n-Hintikka-kaavat voitaisiin määritellä kullakin m rajoittamalla propositiosymboleiden joukkoa Φ joukkoon $\{p_i \mid i \leq m\}$ ja määrittelemällä muutoin n-Hintikka-kaavojen tapaan. Vastaavasti m, n-bisimilaarisuus voitaisiin määritellä pelin $G_{m,n}$ avulla. Näin saataisiin kullekin kehykselle $\mathcal{F}$ ja sen pisteelle w joukkoehdokas $\Delta' = \{\varphi^{m,n}_{\mathcal{F},w} \mid m, n \in N\}$. Näin määritelty kaavajoukko ei kuitenkaan riitä takaamaan edes n-bisimilaarisuutta.

Esimerkki 8 Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, missä W on luonnollisten lukujen joukko $\mathbf{N}$, $R = \{(0, i) \mid i \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ ja $V(p_i) = \{k \mid k \geq i\}$. Olkoon $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$, missä $W' = W \cup \{\omega\}$, $R' = R \cup \{(0, \omega)\}$ ja $V'(p_i) = V(p_i) \cup \{\omega\}$. Nyt mallin $\mathcal{M}$ piste 0 on m, n-bisimilaarinen mallin $\mathcal{M}'$ pisteen 0 kanssa jokaisella $m, n \in \mathbf{N}$, sillä kun propositiosymboleista tarkasteluun otetaan vain symbolit p_k, $k \leq m$, jollain ennalta kiinnitetyllä vakiolla m, ei pistettä ω voida erottaa mallin $\mathcal{M}$ pisteestä m. Mallin $\mathcal{M}$ piste 0 ei kuitenkaan ole 1-bisimilaarinen mallin $\mathcal{M}'$ pisteen 0 kanssa, sillä kun propositiosymboleita on käytössä ääretön määrä, pelaaja $\forall$ voittaa ensimmäisellä kierroksella valitsemalla maailman ω.

Seuraavassa luvussa Goldblatt-Thomasonin lauseen yleistyksiä haetaan vahventamalla käytettävää kieltä.

5 Ilman kompaktisuusoletusta

Lauseen 4.2 todistuksessa päästiin kompaktisuuden avulla kaavajoukon $\Delta_{\mathcal{F},w}$ äärellisestä toteutuvuudesta sen toteutuvuuteen. Jos tämä kaavajoukko on alunperin äärellinen, ei kompaktisuusoletusta tarvita. Tällöin p-morfisuus voidaan välittää yksittäisellä kaavalla.

Lause 5.1 *Oletetaan, että jokaista luokan C kehystä $\mathcal{F}$ ja sen pistettä w kohti on olemassa logiikan $\mathcal{L}$ kaava $\varphi_{\mathcal{F},w}$, joka toteutuu pisteessä w, ja jos se toteutuu kehyksen $\mathcal{G}$ jossain pisteessä v, niin $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva. Olkoon K kehysluokka, joka on suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen. Tällöin K on $\mathcal{L}$-määriteltävissä luokan C suhteen (Λ_K määrittelee luokan K).*

Todistus. Olkoon K kehysluokka, joka toteuttaa mainitut sulkeumaehdot ja olkoon $\mathcal{F}$ luokan C kehys, jolla $\mathcal{F} \models \Lambda_K = \{\phi \in \mathcal{L} \mid \mathcal{F} \models \phi \text{ jokaisella } \mathcal{F} \in K\}$. Koska $\mathcal{F}$ saadaan pistegeneroitujen kehystensä erillisen yhdisteen p-morfisena kuvana ja luokka K on suljettu näiden operaatioiden suhteen, riittää todistaa väite pistegeneroiduille malleille. Voidaan siis olettaa, että $\mathcal{F}$ on pisteen w generoima. Koska oletus $K \models \neg\varphi_{\mathcal{F},w}$ johtaisi ristiriitaan $\mathcal{F} \models \neg\varphi_{\mathcal{F},w}$, täytyy olla olemassa luokan K kehys $\mathcal{G}$, joka toteuttaa kaavan $\varphi_{\mathcal{F},w}$ pisteessään v. Oletuksen mukaan $\mathcal{F} = \mathcal{F}_w$ on tällöin kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva, joten luokan K sulkeumaehtojen nojalla $\mathcal{F} \in K$. $\square$

Ensimmäinen luonnollinen askel lauseen 5.1 oletusten toteuttamiseksi on rajoittaa luokkaa C niin, että sopiva kaava löytyy. Äärellisten ja transitiivisten kehysten tapauksessa tähän käyvät Jankov-Fine kaavat [1, s. 143 – 144].

Määritelmä 5.1 Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ äärellinen, transitiivinen kehys ja $w \in W$ sen piste. Numeroidaan kehyksen $\mathcal{F}_w$ maailmat $w = w_0, \ldots, w_n$ ja määritellään erotteleva malli $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = \langle \mathcal{F}_w, V \rangle$, missä $V(p_i) = \{w_i\}$, kun $i \leq n$. Jankov-Fine kaava $\psi_{\mathcal{F},w}$ saadaan seuraavien kaavojen

(i) p_0,

(ii) $\Box(p_0 \vee \ldots \vee p_n)$,

(iii) $(p_i \to \neg p_j) \wedge \Box(p_i \to \neg p_j)$ aina, kun $i \neq j \leq n$,

(iv) $(p_i \to \Diamond p_j) \wedge \Box(p_i \to \Diamond p_j)$ aina, kun $(w_i, w_j) \in R$,

(v) $(p_i \to \neg\Diamond p_j) \wedge \Box(p_i \to \neg\Diamond p_j)$ aina, kun $(w_i, w_j) \notin R$

konjunktiona.

Vastaava asia voitaisiin toki tehdä myös Hintikka-kaavojen avulla, mutta Jankov-Fine kaavojen kohdat on määritelty niin, että p-morfismin todistaminen, sillä lisäoletuksella, että myös toinen kehys on transitiivinen, on suoraviivaista.

Lemma 5.1 *Olkoon $\mathcal{F}$ äärellinen, transitiivinen kehys, w sen piste ja $\psi_{\mathcal{F},w}$ vastaava Jankov-Fine-kaava. Tällöin jokaisella transitiivisella kehyksellä $\mathcal{G}$, joka toteuttaa kaavan $\psi_{\mathcal{F},w}$ pisteessään v, on olemassa surjektiivinen p-morfismi $\mathcal{G}_v \to \mathcal{F}_w$ (eli $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva). (vrt. [1, Lemma 3.20, s. 144]).*

Todistus. Olkoon $\mathcal{G} = \langle W_{\mathcal{G}}, R_{\mathcal{G}} \rangle$ transitiivinen kehys. Oletetaan, että on olemassa sellainen valuaatio V ja sellainen maailma v, että $\langle \mathcal{G}, V \rangle, v \models \psi_{\mathcal{F},w}$. Määritellään $f(v') = w_i$, kun $v' \in V(p_i)$ ja osoitetaan, että f on surjektiivinen p-morfismi $\mathcal{G}_v \to \mathcal{F}_w$.

Osoitetaan ensin, että f on funktio. Valitaan mielivaltainen $v' \in W_{\mathcal{G}_v}$.

(i) Jos $v' = v$, niin oletuksen mukaan $v' \in V(p_0)$ ($\langle \mathcal{G}, V \rangle, v \models p_0$). Lisäksi $\langle \mathcal{G}, V \rangle, v' \models p_0 \to \neg p_j$, kun $j \neq 0$, joten $v' \notin V(p_j)$, kun $j \neq 0$.

(ii) Jos $v' \neq v$, niin $(v, v') \in R_{\mathcal{G}_v}$ ($\mathcal{G}_v$ transitiivinen ja pisteen v generoima). Nyt $\langle \mathcal{G}, V \rangle, v' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_n) \wedge \bigwedge_{i \neq j}(p_i \to \neg p_j)$. Siispä $v' \in V(p_i)$ täsmälleen yhdellä $0 < i \leq n$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla f on hyvinmääritelty kuvaus.

Osoitetaan sitten, että f on surjektio. Valitaan mielivaltainen $w_i \in W_{\mathcal{F}_w}$.

(i) Jos $w_i = w = w_0$, niin $f(v) = w_i$.

(ii) Jos $w_i \neq w$, niin $(w, w_i) \in R_{\mathcal{F}}$ ($\mathcal{F}_w$ transitiivinen ja pisteen w generoima). Nyt $\langle \mathcal{G}_v, V \rangle, v \models p_0 \wedge (p_0 \to \Diamond p_i)$, joten on olemassa sellainen $v' \in W_{\mathcal{G}_v}$, että $(v, v') \in R_{\mathcal{G}_v}$ ja $\langle \mathcal{G}_v, V \rangle, v' \models p_i$. Tällöin $f(v') = w_i$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla f on surjektio.

Osoitetaan vielä, että f on p-morfismi $\mathcal{G}_v \to \mathcal{F}_w$.

(i) Oletetaan, että $(v_1, v_2) \in R_{\mathcal{G}_v}$. Nyt joillain i ja j pätee $f(v_1) = w_i$ ja $f(v_2) = w_j$ eli $v_1 \in V(p_i)$ ja $v_2 \in V(p_j)$. Nyt $\langle \mathcal{G}_v, V \rangle, v_1 \not\models p_i \to \neg\Diamond p_j$, joten on oltava $(f(v_1), f(v_2)) = (w_i, w_j) \in R_{\mathcal{F}}$.

(ii) Oletetaan sitten, että $f(v_1) = w_i$ ja $(w_i, w_j) \in R_{\mathcal{F}}$. Nyt $v_1 \in V(p_i)$ ja lisäksi oletuksen mukaan $\langle \mathcal{G}_v, V\rangle, v_1 \models p_i \to \Diamond p_j$. Siis on olemassa sellainen v_2, että $(v_1, v_2) \in R_{\mathcal{G}_v}$ ja $v_2 \in V(p_j)$. Nyt $f(v_2) = w_j$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla f on p-morfismi. $\square$

Lisäksi $\psi_{\mathcal{F},w}$ on toteutuva kehyksen $\mathcal{F}$ pisteessä w, joten lemman 5.1 ja lauseen 5.1 nojalla saadaan seuraava tulos.

Seuraus 5.2 *Transitiivinen kehysluokka, joka on suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen, on määriteltävissä*[6] *äärellisten kehysten luokan K_{fin} suhteen.*

Yksi tapa kiertää transitiivisuutta, on lisätä Jankov-Fine-kaavoihin sopivasti $\Box$-operaattoreita. Esimerkiksi kaava $\bigwedge_{i \leq n} \Box^i(p_1 \vee \ldots \vee p_k)$ sanoo, että kaikilla poluilla, joiden pituus on korkeintaan n, on voimassa $(p_1 \vee \ldots \vee p_k)$. Tämä ei kuitenkaan riitä, sillä ilman asyklisyysoletusta äärellisessäkin kehyksessä voi olla mielivaltaisen pitkiä polkuja, jolloin kaavoja tarvitaan ääretön määrä ja ollaan taasen kompaktisuusoletuksen tarpeessa. Yksinkertaisena esimerkkinä tästä voidaan tarkastella kehyksen $\mathcal{F} = \langle \{w\}, \{(w, w)\}\rangle$ Jankov-Fine-kaavaa $\psi_{\mathcal{F},w} = p \wedge \Box p$. Lisäämällä $\Box$-operaattoreita saadaan kaava $\psi^n_{\mathcal{F},w} = p \wedge (\bigwedge_{i \leq n} \Box^i p)$. Kuitenkin jokaisella n on olemassa (äärellinen) kehys (polku, jonka pituus on suurempi kuin n), jossa kaava $\psi^n_{\mathcal{F},w}$ toteutuu, mutta jonka p-morfinen kuva alkuperäinen kehys ei kuitenkaan ole. Tarkastellaan seuraavaksi, miten polkukvanttorin A (vrt. [2, s. 296]) käyttö tuo helpotusta tähän ongelmaan.

Määritelmä 5.2 Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ malli ja w sen piste. Määritellään jokaisella kaavalla ϕ

$$\mathcal{M}, w \models A\phi \;\Leftrightarrow\; \phi \text{ on tosi jokaisessa pisteestä } w \text{ lähtevän polun pisteessä.}$$

Tällainen polkukvanttori on määriteltävissä seuraavaksi esiteltävässä modaalisessa μ-kalkyylissä [9, 13], jonka esittelyssä käytetään useasta eri lähteestä kootun seminaariesitelmän [8] merkintöjä.

Määritelmä 5.3 Symbolin p esiintymä kaavassa ϕ on positiivinen, jos kaavassa ϕ on parillinen määrä negaatiosymboleita, joiden vaikutusalassa kyseinen symbolin p esiintymä on. Modaalisen μ-kalkyylin kieli μML saadaan lisäämällä

[6] Tässä $\Phi = \{p_i \mid i \in \mathbf{N}\}$, eikä erillistä käännöstä tarvitse tehdä, sillä Jankov-Fine-kaavoissa käytetään vain joukon Φ propositiosymboleita.

tavallisen modaalilogiikan kaavanmuodostussääntöihin seuraava kaavanmuodostussääntö:

> Jos ϕ on kaava, jossa kaikki symbolin p esiintymät ovat positiivisia, niin $\mu p.\phi$ ja $\nu p.\phi$ ovat kaavoja.

Kiintopisteoperaatorit μ ja ν sitovat edellä propositionaalisen muuttujan p.

Jatkossa meille riittävät itseasiassa *yksinkertaiset* μML-kaavat, joissa kiintopisteoperaattoria käytetään vain kerran, joten rajoitetaan jatkotarkastelut tällaisiin yksinkertaisiin μML-kaavoihin.

Modaalilogiikan kaava φ määrittelee kullakin mallilla $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ kuvauksen $\varphi_{\mathcal{M},p}(X) : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$:

$$\varphi_{\mathcal{M},p}(X) = \{w \in W \mid \langle W, R, V'\rangle, w \models \varphi, \text{ missä } V' = V(X/p)\},$$

missä $V(X/p)(p) = X$ ja $V(X/p)(q) = V(q)$, kun $q \neq p$. Joukko $Z \in \mathcal{P}(W)$ on kuvauksen $\varphi_{\mathcal{M},p}$ kiintopiste, jos sen arvo ei muutu kuvauksessa eli $\varphi_{\mathcal{M},p}(Z) = Z$. Osajoukkorelaation suhteen pienintä tällaista joukkoa kutsutaan pienimmäksi kiintopisteeksi (least fixed point) ja suurinta suurimmaksi kiintopisteeksi (greatest fixed point). Kun μML-kaavojen ehto symbolin p positiivisuudesta on voimassa, kuvaukset $\varphi_{\mathcal{M},p}$ ovat monotonisia, joten suurin ja pienin kiintopiste ovat aina olemassa. Niinpä kiintopisteoperaattoreiden tulkinnat voidaan luontevasti antaa näiden kuvausten $\varphi_{\mathcal{M},p}$ pienimmän kiintopisteen (merkitään LFP.$\varphi_{\mathcal{M},p}$) ja suurimman kiintopisteen (merkitään GFP.$\varphi_{\mathcal{M},p}$) avulla.

Määritelmä 5.4 Olkoon $\mathcal{M}$ malli ja w sen piste. Tällöin

$$\mathcal{M}, w \models \mu p.\varphi \Leftrightarrow w \in \mathrm{LFP}.\varphi_{\mathcal{M},p}$$

ja

$$\mathcal{M}, w \models \nu p.\varphi \Leftrightarrow w \in \mathrm{GFP}.\varphi_{\mathcal{M},p}.$$

Nyt voidaan osoittaa, että μML-kaava $\nu p.(\psi \wedge \Box p)$, missä p ei esiinny kaavassa ψ ja ψ on tavallisen modaalilogiikan kaava, määrittelee polkukvanttoria käyttävän kaavan $A\psi$.

Lemma 5.2 *Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ malli ja ψ tavallisen modaalilogiikan kaava, jossa ei esiinny symbolia p. Tällöin*

$$\{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \nu p.(\psi \wedge \Box p)\} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models A\psi\}.$$

Todistus. Merkitään $\varphi = (\psi \wedge \Box p)$. Tällöin $\varphi_{\mathcal{M},p}(X) = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi \text{ ja } \forall w' : ((w, w') \in R \Rightarrow w' \in X)\}$. Merkitään $E = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models A\psi\}$ ja osoitetaan, että E on kuvauksen $\varphi_{\mathcal{M},p}$ suurin kiintopiste.

Osoitetaan, että $E \subseteq \varphi_{\mathcal{M},p}(E)$. Valitaan mielivaltainen $w \in E$. Siis $\mathcal{M}, w \models A\psi$, joten erityisesti $\mathcal{M}, w \models \psi$. Lisäksi kaikilla pisteestä w lähtevillä poluilla ψ on tosi. Erityisesti jos $(w, w') \in R$, on ψ tosi myös kaikilla pisteestä w' lähtevillä poluilla. Siispä $\forall w' : ((w, w') \in R \Rightarrow w' \in E)$, joten $w \in \varphi_{\mathcal{M},p}(E)$.

Osoitetaan sitten, että E on suurin ehdon $E \subseteq \varphi_{\mathcal{M},p}(E)$ täyttävä joukko. Oletetaan, että B toteuttaa ehdon $B \subseteq \varphi_{\mathcal{M},p}(B)$, ja valitaan mielivaltainen $w \in B$. Tällöin $w \in \varphi_{\mathcal{M},p}(B)$, joten $\mathcal{M}, w \models \psi$. Olkoon $w = w_0 R w_1 R \ldots R w_k$ pisteestä w lähtevä polku, jolla ψ on tosi ja jolla $w_i \in B$, kun $i \leq k$. Valitaan mielivaltainen w_{k+1}, jolla $(w_k, w_{k+1}) \in R$. Oletuksen nojalla $w_k \in B$, joten $w_k \in \varphi_{\mathcal{M},p}(B)$. Tällöin $\mathcal{M}, w_k \models \psi$ ja jokaisella w', jolla $(w_k, w') \in R$ on voimassa, myös $w' \in B$ on voimassa. Erityisesti siis $w_{k+1} \in B$. Mutta nyt $w_{k+1} \in \varphi_{\mathcal{M},p}(B)$, joten myös $\mathcal{M}, w_{k+1} \models \psi$. Näin on osoitettu, että jokaisella pisteestä w lähtevällä polulla ψ on tosi, joten $w \in E$. Siis $B \subseteq E$.

Koska E on suurin ehdon $E \subseteq \varphi_{\mathcal{M},p}(E)$ täyttävä joukko, niin operaattorin $\varphi_{\mathcal{M},p}$ monotonisuuden nojalla sen täytyy olla operaattorin $\varphi_{\mathcal{M},p}$ suurin kiintopiste eli $\{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \nu p.(\psi \wedge \Box p)\} = GFP.\varphi_{\mathcal{M},p} = E$. $\square$

Polkukvanttorin avulla (esimerkiksi μ-kalkyylissä) saadaan määriteltyä äärellisille malleille Jankov-Fine-kaavoista muunnos, jossa ei tarvitse olettaa transitiivisuutta.

Määritelmä 5.5 Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ äärellinen kehys ja $w \in W$ sen piste. Olkoon $\Phi = \{p_v \mid v \in \mathcal{F}_w\}$. Määritellään erotteleva malli $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = \langle \mathcal{F}_w, V \rangle$, missä $V(p_v) = \{v\}$, kun $v \in \mathcal{F}_w$. Olkoon φ kaavojen

(i) $\bigvee_{v \in \mathcal{F}_w} p_v$,

(ii) $\bigwedge_{v \neq q} (p_v \to \neg p_q)$,

(iii) $\bigwedge_{(v,q) \in R} (p_v \to \Diamond p_q)$,

(iv) $\bigwedge_{(v,q) \notin R} (p_v \to \neg \Diamond p_q)$

konjunktio. Määritellään $\psi^{\mu}_{\mathcal{F},w} = p_w \wedge A\varphi$.

Lemma 5.3 *Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ äärellinen kehys, $w \in W$, $\psi^{\mu}_{\mathcal{F},w}$ määritelmän 5.5 mukainen kaava ja $\mathcal{G} = \langle W_{\mathcal{G}}, R_{\mathcal{G}} \rangle$ kehys, jonka malli $\mathcal{N} = \langle \mathcal{G}, V \rangle$ toteuttaa kaavan $\psi^{\mu}_{\mathcal{F},w}$ pisteessään v. Tällöin $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva.*

Todistus. Määritellään $f(v') = u$, kun $v' \in V(p_u)$, ja osoitetaan, että f on surjektiivinen p-morfismi kehykseltä $\mathcal{G}_v$ kehykselle $\mathcal{F}_w$.

Osoitetaan ensin, että f on funktio. Valitaan mielivaltainen $v' \in W_{\mathcal{G}_v}$.

(i) Jos $v' = v$, niin oletuksen mukaan $v' \in V(p_w)$ ($\mathcal{N}, v \models p_w$). Lisäksi $\mathcal{N}, v' \models p_w \to \neg p_u$, kun $u \neq w$, joten $v' \notin V(p_u)$, kun $u \neq w$.

(ii) Jos $v' \neq v$, niin on olemassa $R_{\mathcal{G}}$-polku pisteestä v pisteeseen v'. Koska $\mathcal{N}, v \models A\varphi$, niin $\mathcal{N}, v' \models (\bigvee_{u \in \mathcal{F}_w} p_u) \wedge (\bigwedge_{u \neq q}(p_u \to \neg p_q))$. Siispä $v' \in V(p_u)$ täsmälleen yhdellä $u \in \mathcal{F}_w$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla f on hyvinmääritelty kuvaus.

Osoitetaan sitten, että f on surjektio. Valitaan mielivaltainen $u \in W_{\mathcal{F}_w}$.

(i) Jos $u = w$, niin $f(v) = u$.

(ii) Jos $u \neq w$, niin on olemassa R-polku $w = w_0 R w_1 R \ldots R w_n = u$ pisteestä w pisteeseen u. Osoitetaan induktiolla polun pituuden suhteen, että jokainen polun piste $w_i \in W$ on jonkun kehyksen $\mathcal{G}_v$ pisteen v_i f-kuva. Kohdan (i) perusteella väite on voimassa, kun polun pituus on 0. Oletetaan, että väite pätee, kun polun pituus on $k < n$. Nyt $\mathcal{N}, v_k \models p_{w_k} \wedge (p_{w_k} \to \Diamond p_{w_{k+1}})$, joten on olemassa sellainen $v_{k+1} \in W_{\mathcal{G}_v}$, että $(v_k, v_{k+1}) \in R_{\mathcal{G}}$ ja $\mathcal{N}, v_{k+1} \models p_{w_{k+1}}$. Tällöin $f(v_{k+1}) = w_{k+1}$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla f on surjektio.

Osoitetaan vielä, että f on p-morfismi $\mathcal{G}_v \to \mathcal{F}_w$.

(ii) Oletetaan, että $(v_1, v_2) \in R_{\mathcal{G}_v}$. Nyt joillain maailmoilla $i, j \in W_{\mathcal{F}_w}$ pätee $f(v_1) = i$ ja $f(v_2) = j$ eli $v_1 \in V(p_i)$ ja $v_2 \in V(p_j)$. Jos olisi $(i, j) \notin R$, olisi myös $\mathcal{N}, v_1 \models p_i \to \neg\Diamond p_j$ voimassa. Mutta $\mathcal{N}, v_1 \models \neg(p_i \to \neg\Diamond p_j)$, joten on oltava $(f(v_1), f(v_2)) = (i, j) \in R_{\mathcal{F}_w}$.

(iii) Oletetaan sitten, että $f(v_1) = i$ ja $(i, j) \in R_{\mathcal{F}_w}$. Nyt $v_1 \in V(p_i)$ ja lisäksi oletuksen mukaan $\mathcal{N}, v_1 \models p_i \to \Diamond p_j$. Siis on olemassa sellainen v_2, että $(v_1, v_2) \in R_{\mathcal{G}_v}$ ja $v_2 \in V(p_j)$. Nyt $f(v_2) = j$.

Kohtien (ii) ja (iii) nojalla f on p-morfismi. $\square$

Lisäksi $\psi^{\mu}_{\mathcal{F},w}$ on toteutuva kehyksen $\mathcal{F}$ pisteessä w, joten lemman 5.3 ja lauseen 5.1 nojalla saadaan seuraava tulos.

Seuraus 5.3 *Generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen suljettu kehysluokka on määriteltävissä*[7] *äärellisten kehysten luokan suhteen yksinkertaisten* μML*-kaavojen avulla.*

Lisäksi on yleisesti tunnettua, että μML-kaavojen totuus säilyy bisimulaatioissa, joten kehysluokka, joka on määriteltävissä μML-kaavojen avulla, on myös suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen.

Seuraava tavoite on päästä myös äärellisyydestä eroon. Tähän ei edes täysi μ-kalkyyli riitä, sillä μML-kaavoja on vain numeroituva määrä (kun propositiosymboleja on käytössä korkeintaan numeroituva määrä), kun taas ei-bisimilaarisia kehyksiä on ylinumeroituva määrä.

Esimerkki 9 Määritellään jokaisella ordinaalilla α kehys $\mathcal{F}_\alpha = \langle W_\alpha, R_\alpha \rangle$, missä W_α on joukkojen kumulatiivisen hierarkian[8] taso V_α ja R_α on alkiorelaation $\in$ käänteisrelaatio $\ni$. On helppo havaita, että

$$(\mathcal{F}_\alpha, w \underline{\leftrightarrow} \mathcal{F}_\beta, w') \Leftrightarrow (w = w').$$

Jos nimittäin $w \neq w'$, on olemassa $v \in (w \backslash w' \cup w' \backslash w)$. Jos pisteet w ja w' olisivat bisimilaariset, täytyisi olla olemassa pisteen v kanssa bisimilaarinen $v' \neq v$. Tällöin on edelleen olemassa $u \in (v \backslash v' \cup v' \backslash v)$ ja sen kanssa bisimilaarinen $u' \neq u$. Koska $\in$-relaatio on hyvinperustettu, päädytään äärellisen monen askeleen jälkeen tilanteeseen, jossa toinen alkioista on tyhjä ja toinen epätyhjä. Niinpä alkuperäiset pisteet eivät voi olla bisimilaariset.

Esimerkin 9 nojalla omaa μML-kaavaa ei millään voi riittää jokaiselle kehykselle. Luonteva keino ylittää tämä ongelma on siirtyminen äärettömiin kieliin. Jotta erottelevat mallit saataisiin määriteltyä mielivaltaisen suurille kehyksille, voi Φ olla mielivaltaisen suuri, jopa aito luokka. Tällöin sallitaan vastaavasti määriteltävyys aidolla kaavaluokalla. Vaihtoehtoisesti voidaan asettaa tarkasteltavien kehysten koolle jokin yläraja κ ja valita propositiosymboleiden joukko Φ, jonka koko on vähintään κ. Tällöin saadaan määriteltävyystuloksia suhteessa kehysluokkaan, jonka kehysten koko on korkeintaan κ.

[7] Tässä oletetaan, että käytössä on vähintään numeroituvasti ääretön propositiosymboleiden joukko Φ. Koska $\psi^{\mu}_{\mathcal{F},w}$ sisältää vain äärellisen määrän propositiosymboleita, se voidaan kääntää yksinkertaiseksi μML[Φ]-kaavaksi korvaamalla propositiosymbolit yhdenmukaisesti joukon Φ propositiosymboleilla. Vaihtoehtoisesti voitaisiin kaavan määrittelyssä kiinnittää propositiosymbolit, kuten Jankov-Fine-kaavojen määrittelyssä tehtiin.

[8] Kumulatiivinen hierarkia määritellään seuraavasti: $V_0 = \emptyset$, $V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$, kun α on rajaordinaali, ja $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$.

Määritelmä 5.6 Olkoon Φ luokka propositiosymboleja. Kieli $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi,\tau]$ saadaan kielestä $\mathrm{ML}[\Phi,\tau]$ sallimalla äärettömät disjunktiot ja konjunktiot. Merkitään tavallisesta modaalilogiikasta $\mathrm{ML}[\Phi,\tau_0]$ saatua ääretöntä kieltä $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$ tai lyhyesti $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}$, kun Φ on asiayhteydestä selvä.

Nyt luonnollinen yleistys kaavoille $\psi^{\mu}_{\mathcal{F},w}$ saadaan jättämällä määritelmästä 5.5 äärellisten kehysten oletus pois ja sallimalla äärettömät konjunktiot ja disjunktiot.

Määritelmä 5.7 Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ kehys ja $w \in W$ sen piste. Olkoon $\Phi = \{p_v \mid v \in \mathcal{F}_w\}$. Määritellään erotteleva malli $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = \langle \mathcal{F}_w, V\rangle$, missä $V(p_v) = \{v\}$, kun $v \in \mathcal{F}_w$. Olkoon φ kaavojen

(i) $\bigvee_{v\in\mathcal{F}_w} p_v$,

(ii) $\bigwedge_{v\neq q}(p_v \to \neg p_q)$,

(iii) $\bigwedge_{(v,q)\in R}(p_v \to \Diamond p_q)$,

(iv) $\bigwedge_{(v,q)\notin R}(p_v \to \neg\Diamond p_q)$

konjunktio. Määritellään $\psi^{\infty}_{\mathcal{F},w} = p_w \wedge A\varphi$.

On suoraviivaista nähdä (lemman 5.3 tapaan), että jos kehyksen $\mathcal{G}$ piste v toteuttaa kaavan $\psi^{\infty}_{\mathcal{F},w}$, niin kehys $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ p-morfinen kuva. Näin saadaan seuraava tulos.

Seuraus 5.4 *Olkoon Φ propositiosymboleiden joukko, jonka koko on vähintään κ. Generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen suljettu kehysluokka on määriteltävissä yksinkertaisten $\mu\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavojen*[9] *avulla suhteessa kehysluokkaan, jonka kehysten koko on korkeintaan κ.*

Lisäksi $\mu\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavojen totuus säilyy bisimulaatioissa, joten kehysluokka, joka on määriteltävissä $\mu\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavojen avulla, on myös suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen.

Kiintopisteet tulevat kuitenkin tarpeettomiksi, sillä polkukvanttori voidaan määritellä suoraan $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}$-kaavojen avulla.

[9] Kun käytettävissä on vähintään κ propositiosymbolia ja kehyksen $\mathcal{F}$ koko on korkeintaan κ, voidaan kaava $\psi^{\infty}_{\mathcal{F},w}$ kääntää yhdenmukaisesti $\mu\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavaksi.

Lemma 5.4 *Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ malli ja ψ tavallisen modaalilogiikan kaava. Tällöin*

$$\{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \bigwedge\{\Box^n\psi \mid n \in \mathbf{N}\}\}^{10} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models A\psi\}.$$

Todistus. Jos $\mathcal{M}, w \models A\psi$, on $\mathcal{M}, w \models \Box^n\psi$ voimassa jokaisella $n \in \mathbf{N}$. Jos taas $\mathcal{M}, w \not\models A\psi$, on olemassa (mahdollisesti 0-mittainen) R-polku $wRw_1R \ldots Rw_n$, jonka pisteessä w_n on voimassa $\mathcal{M}, w_n \not\models \psi$. Tällöin $\mathcal{M}, w \not\models \Box^n\psi$ eli $\mathcal{M}, w \not\models \bigwedge\{\Box^n\psi \mid n \in \mathbf{N}\}$. $\square$

Seuraus 5.5 *Olkoon Φ propositiosymboleiden joukko, jonka koko on vähintään κ. Generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen suljettu kehysluokka on* $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$*-määriteltävissä suhteessa kehysluokkaan, jonka kehysten koko on korkeintaan κ.*

Lisäksi $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavojen totuus säilyy bisimulaatioissa, joten kehysluokka, joka on määriteltävissä $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavojen avulla, on myös suljettu generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen.

Huomautus 2 Jos voidaan olettaa, että propositiosymboleita on käytössä tarpeeksi (aito luokka) jokaisen kehyksen erottelevan mallin määrittelyyn ja jos sallitaan määriteltävyys aidolla kaavaluokalla, voidaan seurauksista 5.4 ja 5.5 poistaa kokorajoitteet.

[10] Huomaa, että $\Box^0\psi = \psi$.

6 GML-määriteltävyys

Modaalilogiikan kieltä voidaan vahventaa ottamalla käyttöön operaattoreita, joiden avulla voidaan laskea seuraajien lukumääriä. Tällaisia operaattoreita käytetään kuvauslogiikoissa (ks. esim. [6]), joissa voi olla tarpeen sanoa esimerkiksi, että jälkeläisiä on vähintään 3 ja korkeintaan 5. Tässä lienee hyvä huomauttaa vielä taustatiedoiksi, että yksinkertainen kuvauslogiikka $\mathcal{ALC}$ (jossa ei ole laskemista) on multimodaalilogiikan $\mathbf{K_m}$ (jossa on käytössä m yksipaikkaista modaalioperaattoria) merkinnällinen variantti [12]. Käytännön sovelluksissa on luonnollista ottaa käyttöön useampia relaatioita (ja niitä vastaavia laskentaoperaattoreita). Tässä rajoitutaan kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi tapaukseen, jossa käytössä on vain yksi relaatio (ja sitä vastaavat laskentaoperaattorit).

Määritellään seuraavaksi GML-kaavat (formulas of Graded Modal Logic). Kolmiomerkintä laskentaoperaattoreille on omaksuttu Conradien [5] työstä. Laskentaoperaattoreita merkitään usein myös indeksoitujen timanttien $\Diamond_i$ ja boksien $\Box_i$ avulla (ks. esim. [11]). Kolmiomerkinnän käyttöä puoltaa se, että laskentaoperaattorit käyttäytyvät eritavoin kuin tavallinen timantti (eivät ole distributiivisia disjunktion suhteen [5, s. 26]). Lisäksi $\leq$- ja $\geq$-merkit kertovat indeksejä paremmin millainen semantiikka operaattoreille tulee.

Määritelmä 6.1 Olkoon Φ joukko propositiosymboleja. GML[Φ]-kaavat määritellään induktiivisesti seuraavasti.

- $p \in \Phi$ on GML[Φ]-kaava.
- Jos φ on GML[Φ]-kaava, niin $\neg\varphi$ on GML[Φ]-kaava.
- Jos φ ja ψ ovat GML[Φ]-kaavoja, niin $(\varphi \wedge \psi)$ on GML[Φ]-kaava.
- Jos φ on GML[Φ]-kaava ja $n \in \mathbf{N}$, niin $\triangleleft_{\geq n}\varphi$ on GML[Φ]-kaava.

Jos Φ on asiayhteydestä selvä, voidaan puhua lyhyesti GML-kaavoista. GML-kaavan ψ *aste* $\deg(\psi)$ on maksimaalinen sisäkkäisten laskentaoperaattoreiden määrä ja *indeksi* $I(\psi)$ on suurin kaavassa ψ esiintyvä laskentaoperaattorin rajoite $({}_{\geq m})$ [11, s. 6].

Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ malli ja $w \in W$ sen piste. Tällöin

$$\mathcal{M}, w \models \triangleleft_{\geq n}\varphi \iff |\{v \in W \mid (w, v) \in R \wedge (\mathcal{M}, v \models \varphi)\}| \geq n$$

eli GML-kaava $\triangleleft_{\geq n}\varphi$ on tosi mallin $\mathcal{M}$ pisteessä w täsmälleen silloin, kun on olemassa vähintään n pisteen w seuraajaa, joissa φ on tosi. Luonnollisella tavalla voidaan määritellä myös kaavat $\lhd_{\leq n}\varphi := \neg \lhd_{\geq n+1} \varphi$ (on olemassa korkeintaan n seuraajaa, joissa φ tosi), $\lhd_{=n}\varphi := (\lhd_{\geq n}\varphi \wedge \lhd_{\leq n}\varphi)$ (on olemassa tasan n seuraajaa, joissa φ tosi) ja $\Diamond\varphi := \lhd_{\geq 1}\varphi$ (on olemassa vähintään yksi seuraaja, jossa φ tosi) (vrt. [5, 27 – 28]).

De Rijke esitteli artikkelissaan tähän yhteyteen sopivan g-bisimulaation [11, 3 – 4] ja rajoitetun g_k-bisimulaation [11, s. 5] käsitteen ja todisti joitakin niihin liittyviä perustuloksia. Hän heitti ilmaan myös kysymyksen g-bisimulaatioiden käytöstä Goldblatt-Thomasonin lauseen analogian todistamisessa [11, s. 12], mihin tässä luvussa pyritään antamaan jonkinlaista lisävaloa. Määrittelyissä käytetään Conradien [5] esitystapaa g-bisimulaatiolle ja de Rijken esitystä yksinkertaistavaa pelimäärittelyä rajoitetulle g_k-bisimulaatiolle.

Määritelmä 6.2 Olkoot $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ ja $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ malleja. Epätyhjä relaatio $Z \subseteq W \times W'$ on g-bisimulaatio (counting bisimulation [5, s. 39]), jos

(i) Jos $(w, w') \in Z$, niin w ja w' toteuttavat samat propositiosymbolit.

(ii) Jos $(w, w') \in Z$ ja $S \subseteq \{v \mid (w, v) \in R\}$ on äärellinen[11], niin on olemassa sellainen $S' \subseteq \{v' \mid (w', v') \in R'\}$, että $|S| = |S'|$, $\forall v \in S : \exists v' \in S' : (v, v') \in Z$ ja $\forall v' \in S' : \exists v \in S : (v, v') \in Z$.

(iii) Jos $(w, w') \in Z$ ja $S' \subseteq \{v' \mid (w', v') \in R'\}$ on äärellinen, niin on olemassa sellainen $S \subseteq \{v \mid (w, v) \in R\}$, että $|S| = |S'|$, $\forall v \in S : \exists v' \in S' : (v, v') \in Z$ ja $\forall v' \in S' : \exists v \in S : (v, v') \in Z$.

Jos Z on g-bisimulaatio mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä ja $(w, w') \in Z$, merkitään

$$Z :\ \mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow}_g \mathcal{M}', w'.$$

Voidaan osoittaa [11, Propositio 3.3, s. 4], että g-bisimilaariset pisteet toteuttavat samat GML-kaavat. Tarkasteltaessa g-bisimulaatioita kehysten välillä, ehdot (ii) ja (iii) riittävät.

G-bisimilaarisuus voitaisiin määritellä myös pelin avulla. Jatkossa tarvitaan kuitenkin määritelmää tilanteeseen, jossa kaavojen astetta ja indeksiä on rajoitettu etukäteen. Määritellään tätä varten seuraava peli.

Määritelmä 6.3 Olkoot $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ ja $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$ Kripke-malleja ja w, w' vastaavasti niiden pisteitä. Peli $G_{n,m}((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$ määritellään seuraavasti:

[11] Tässä voitaisiin sallia ekvivalentisti äärellisten joukkojen lisäksi myös numeroituvasti äärettömät joukot.

Pelaajat: Hyökkäävä pelaaja $\forall$ ja puolustava pelaaja $\exists$.

Alkutilanne: Jos $\mathcal{M}, w \models p_i \not\Leftrightarrow \mathcal{M}', w' \models p_i$ jollain p_i, niin $\exists$ häviää heti. Muutoin kiinnitetään $v_0 = w$ ja $v'_0 = w'$ ja asetetaan $k = 1$.

Pelinkulku: Jos $k = n + 1$ peli on päättynyt. Oletetaan, että parit $(v_i, v'_i)_{i<k}$ on pelattu, $1 \leq k \leq n$ ja kumpikaan ei ole vielä hävinnyt. Tällöin

1. Pelaaja $\forall$ valitsee joukon $S \subseteq \{v \in W \mid (v_{k-1}, v) \in R\}$, $0 < |S| \leq m$ tai joukon $S' \subseteq \{v' \in W' \mid (v'_{k-1}, v') \in R'\}$, $0 < |S'| \leq m$. Mikäli $\forall$ ei voi valita, peli päättyy ja $\forall$ häviää pelin.
2. Pelaaja $\exists$ valitsee vastaavasti jäljelle jääneestä mallista joukon $S' \subseteq \{v' \in W' \mid (v'_{k-1}, v') \in R'\}$ tai joukon $S \subseteq \{v \in W \mid (v_{k-1}, v) \in R\}$ ja kiinnittää bijektion $f : S \to S'$. Jos $\exists$ ei voi valita joukkoa tai kiinnittää bijektiota, peli päättyy ja $\exists$ häviää pelin.
3. Pelaaja $\forall$ valitsee alkion $v \in S$ ja asetetaan $(v_k, v'_k) = (v, f(v))$.
4. Tarkastetaan allaoleva voittoehto. Kasvatetaan laskurin k arvoa yhdellä ja jatketaan peliä, mikäli kumpikaan pelaajista ei ole vielä hävinnyt.

Voittoehto: Pelaaja $\exists$ häviää pelin, jos

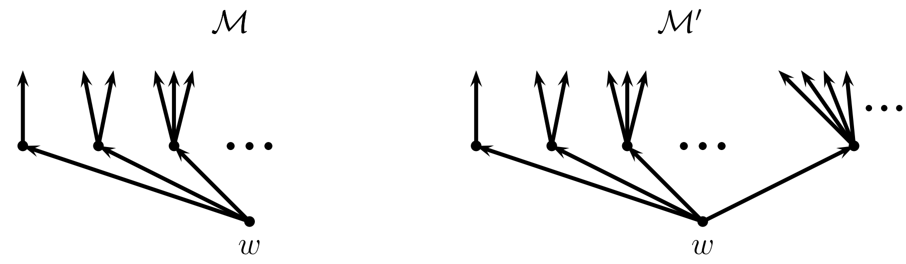
- hän ei voi suorittaa kohtaa 2,
- $\mathcal{M}, v_k \models p_i \not\Leftrightarrow \mathcal{M}', v'_k \models p_i$ jollain i.

Jos $\exists$ ei ole hävinnyt millään pelatulla kierroksella $k \leq n$, hän voittaa pelin. Muutoin $\forall$ voittaa.

Kun pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $G_{n,m}((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$[12], sanotaan, että pisteet w ja w' ovat n-g_m-bisimilaariset (g_m-*bisimulation up to* n [11, s. 5]). Tällöin merkitään $\mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow}^n_{g_m} \mathcal{M}', w'$. Mikäli mallit ovat asiayhteydestä selvät voidaan merkitä myös $w \underline{\leftrightarrow}^n_{g_m} w'$.

Esimerkki 10 Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ ja $\mathcal{M}' = \langle W', R', V'\rangle$, missä $W = \{w\} \cup \{i \mid i \in \mathbf{N}\} \cup \{(i, j) \mid i \geq j \in \mathbf{N}\}$, $R = \{(w, i) \mid i \in \mathbf{N}\} \cup \{(i, (i, j)) \mid i \geq j \in \mathbf{N}\}$, $\forall p \in \Phi : V(p) = \emptyset$, $W' = W \cup \{\omega\} \cup \{(\omega, j) \mid j \in \mathbf{N}\}$, $R' = R \cup \{(w, \omega)\} \cup \{(\omega, (\omega, j)) \mid j \in \mathbf{N}\}$ ja $V'(p) = V(p)$ (ks. kuva 6). Mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ pisteet

[12] Jos pelin sallitaan jatkuvan äärettömän kauan, päästään g_m-bisimilaarisuuden käsitteeseen.



Kuva 6: Esimerkin 10 mallit. Propositiosymbolit ovat epätosia jokaisessa maailmassa.

w ja w ovat n-g_m-bisimilaariset jokaisella n ja m[13], mutta eivät kuitenkaan ole g-bisimilaariset.

Merkitään $\mathcal{M}, w \equiv^n_{g_m} \mathcal{M}', w'$ (tai lyhyemmin $w \equiv^n_{g_m} w'$), jos pisteet w ja w' toteuttavat samat korkeintaan astetta n olevat GML-kaavat, joiden indeksi on korkeintaan m. On helppo havaita, että jos pisteet w ja w' ovat n-g_m-bisimilaariset, niin $w \equiv^n_{g_m} w'$ (ks. lemma 6.1). Käänteinen suunta on voimassa, kun propositiosymboleita on käytössä äärellinen määrä. Todistusta varten määritellään n, m-Hintikka-kaavat.

Määritelmä 6.4 Olkoon Φ äärellinen propositiosymboleiden joukko. Mallin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ pisteeseen w liittyvä n, m-Hintikka-kaava $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}$ määritellään induktiivisesti seuraavasti

$$\begin{aligned}
\varphi^{0,m}_{\mathcal{M},w} &= \bigwedge\{\psi \mid (\psi = p_i \text{ tai } \psi = \neg p_i) \text{ ja } \mathcal{M}, w \models \psi\} \\
\varphi^{n+1,m}_{\mathcal{M},w} &= \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w} \wedge \\
&\quad \bigwedge\{\lhd_{=i}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \mid \exists^{=i} v' : (w, v') \in R \text{ ja } \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v'} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}, 1 \leq i \leq m-1\} \wedge \\
&\quad \bigwedge\{\lhd_{\geq m}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \mid \exists^{\geq m} v' : (w, v') \in R \text{ ja } \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v'} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}\} \wedge \\
&\quad \Box\left(\bigvee\{\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \mid (w, v) \in R\}\right).
\end{aligned}$$

Koska propositiosymboleita on äärellinen määrä ja kaavat ovat tietyn muotoisia, edellä kaikki konjunktiot ja disjunktiot ovat äärellisiä. On helppo nähdä, että $\mathcal{M}, w \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}$, $\deg(\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}) = n$ ja $I(\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}) = m$.

[13] Itseasiassa pisteet w ja w ovat jopa g_m-bisimilaariset jokaisella m.

Lemma 6.1 *Olkoon Φ äärellinen joukko propositiosymboleja, $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ ja $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ malleja ja $w \in W$, $w' \in W'$. Tällöin seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä.*

(i) $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq^n_{g_m} \mathcal{M}', w'$.

(ii) $\mathcal{M}, w \equiv^n_{g_m} \mathcal{M}', w'$.

(iii) $\mathcal{M}', w' \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}$.

Todistus.
(i) $\Rightarrow$ **(ii)**. Osoitetaan induktiolla luvun n suhteen, että

$$\forall w \forall w' ((\mathcal{M}, w \leftrightarroweq^n_{g_m} \mathcal{M}', w') \Rightarrow (\mathcal{M}, w \equiv^n_{g_m} \mathcal{M}', w')).$$

Selvästi tapaus $n = 0$ on voimassa eivätkä konnektiivit tuota ongelmia. Oletetaan sitten, että $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq^{n+1}_{g_m} \mathcal{M}', w'$ ja $\mathcal{M}, w \models \triangleleft_{\geq i}\varphi$, missä $\deg(\varphi) \leq n$ ja $i \leq m$. Nyt pelaaja $\forall$ voi valita pelissä $G_{n,m}((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$ sellaisen joukon $S \subseteq W$, että $|S| = i$ ja jokaisella $v \in S$ pätee $v \models \varphi$. Koska oletuksen mukaan pelaajalla $\exists$ on voittostrategia, hän voi valita vastaavan joukon $S' \subseteq W'$ ja bijektion $f : S \to S'$ siten, että hänellä on voittostrategia loppupelissä. Induktio-oletuksen nojalla joukon S' pisteet toteuttavat kaavan φ, joten $\mathcal{M}', w' \models \triangleleft_{\geq i}\varphi$. Suunta $\mathcal{M}', w' \models \triangleleft_{\geq i}\varphi \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \triangleleft_{\geq i}\varphi$ on symmetrinen. Näin on osoitettu, että pisteet w ja w' toteuttavat samat GML-kaavat.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)**. Määritelmän nojalla n, m-Hintikka-kaavojen indeksi on $\leq m$. Koska $\deg(\varphi^{0,m}_{\mathcal{M},w}) = 0$ ja $\deg(\varphi^{n+1,m}_{\mathcal{M},w}) = \deg(\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}) + 1$, on n, m-Hintikka-kaavojen aste (induktion nojalla) $\leq n$. Osoitetaan vielä induktiolla, että $\forall w \in W(\mathcal{M}, w \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w})$.

Kun $n = 0$, väite on voimassa. Oletetaan, että väite pätee, kun $n = k$. Tarkastellaan maailmaa w. Induktio-oletuksen mukaan $\mathcal{M}, v \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$ jokaisella v, erityisesti myös maailmalla w ja niillä maailmoilla v', joilla $(w, v') \in R$. Siispä

- $\mathcal{M}, w \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}$
- $\mathcal{M}, w \models \triangleleft_{=i}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$, kun $\exists^{=i} v' : ((w, v') \in R$ ja $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v'} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v})$ ja $1 \leq i \leq m - 1$,
- $\mathcal{M}, w \models \triangleleft_{\geq m}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$, kun $\exists^{\geq m} v' : ((w, v') \in R$ ja $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v'} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v})$, ja
- $\mathcal{M}, w \models \Box(\bigvee\{\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \mid (w, v) \in R\})$.

Siispä $\mathcal{M}, w \models \varphi^{n+1,m}_{\mathcal{M},w}$.

(**iii**) $\Rightarrow$ (**i**). Osoitetaan, että

$$\forall w \forall w'((\mathcal{M}', w' \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}) \Rightarrow (\mathcal{M}, w \leftrightarroweq^{n}_{g_m} \mathcal{M}', w')) \qquad (*)$$

induktiolla luvun n suhteen. Kun $n = 0$, $(*)$ on voimassa jokaisella m. Oletetaan induktio-oletuksena, että $(*)$ on voimassa lukuun n asti jokaisella m. Oletetaan sitten, että $\mathcal{M}', w' \models \varphi^{n+1,m}_{\mathcal{M},w}$. Osoitetaan induktiolla pelaajan $\forall$ valitseman joukon S^* koon $k \leq m$ suhteen, että kaikissa tapauksissa pelaaja $\exists$ pystyy vastaamaan sopivasti eli $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq^{n+1}_{g_k} \mathcal{M}', w'$.

Oletetaan ensin, että $k = 1$ eli $|S^*| = 1$.

1. $\forall$ valitsee joukon $S = \{v\} \subseteq W$, missä $(w, v) \in R$. Koska $w' \models \varphi^{n+1,m}_{\mathcal{M},w}$, niin $w' \models \lhd_{\geq 1}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Siis on olemassa alkio $v' \in W'$, jolla $v' \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Nyt $\exists$ voi valita $S' = \{v'\}$ ja asettaa bijektion $f(v) = v'$. Induktio-oletuksen nojalla pelin loppuosa hoituu.

2. $\forall$ valitsee joukon $S' = \{v'\} \subseteq W'$, missä $(w', v') \in R'$. Koska $w' \models \Box(\bigvee\{\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \mid (w, v) \in R\})$ ja disjunktio $\bigvee\{\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \mid (w, v) \in R\}$ ei voi olla tyhjä (muutoin olisi $w' \models \Box\perp$, mikä on ristiriita, sillä pisteellä w' on seuraaja v'), niin on olemassa alkio $v \in W$, jolla $(w, v) \in R$ ja $v' \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Valitaan tällainen alkio v. Nyt $\exists$ valitsee joukon $S = \{v\}$ ja asettaa bijektion $f(v) = v'$. Induktio-oletuksen nojalla pelin loppuosa hoituu tässäkin tapauksessa.

Oletetaan sitten, että pelaajalla $\exists$ on voittostrategia, kun valittujen joukkojen $T \subseteq W$ ja $T' \subseteq W'$ koot ovat $< k + 1 \leq m$. Olkoon S^*, $|S^*| = k + 1$, pelaajan $\forall$ ensimmäinen valinta. Nyt S^* voidaan esittää muodossa $T^* \cup \{v^*\}$. Olkoon $f : T \to T'$ pelaajan $\exists$ voittostrategian mukainen bijektio (joukolta T^* tai joukolle T^*). Nyt jokin seuraavista neljästä kohdasta on voimassa.

1. $S^* = T \cup \{v\} \subseteq W$ (eli $(w, v) \in R$) ja $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \neq \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},u}$ jokaisella $u \in T$. Koska $\mathcal{M}', w' \models \lhd_{\geq 1}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$, on olemassa alkio $v' \in W'$, jolla $v' \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Koska $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \neq \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},u}$ jokaisella $u \in T$, ei v' voi olla mikään joukon T vastinpisteistä. Nyt $\exists$ valitsee joukon $S' = T' \cup \{v'\}$, ja joukon T kuvaavaa bijektiota voidaan laajentaa bijektioksi $S^* \to S'$ asettamalla $f(v) = v'$, eikä $\exists$ näin meneteltäessä häviä tällä kierroksella.

2. $S^* = T' \cup \{v'\} \subseteq W'$ (eli $(w', v') \in R'$) ja $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M}',v'} \neq \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},u}$ jokaisella $u \in T$. Koska $\mathcal{M}', w' \models \Box(\bigvee\{\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \mid (w, v) \in R\})$ (ja disjunktio ei voi olla tyhjä), on olemassa alkio $v \in W$, jolla $(w, v) \in R$ ja $v' \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Koska nyt

$\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M}',v'} \neq \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},u}$ jokaisella $u \in T$, ei v voi olla mikään joukon T pisteistä. Nyt $\exists$ valitsee joukon $S = T \cup \{v\}$, ja joukon T kuvaavaa bijektiota voidaan laajentaa bijektioksi $S \to S^*$ asettamalla $f(v) = v'$, eikä $\exists$ näin meneteltäessä häviä tällä kierroksella.

3. $S^* = T \cup \{v\} \subseteq W$ (eli $(w, v) \in R$) ja $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},u}$ jollain $u \in T$. Olkoon $i = |\{u \in T \mid \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},u} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}\}|$. Koska $\mathcal{M}', w' \models \triangleleft_{\geq i+1}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$, on olemassa alkio $v' \in W' \setminus T'$, jolla $v' \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Nyt $\exists$ valitsee joukon $S' = T' \cup \{v'\}$, ja joukon T kuvaavaa bijektiota voidaan laajentaa bijektioksi $S^* \to S'$ asettamalla $f(v) = v'$, eikä $\exists$ näin meneteltäessä häviä tällä kierroksella.

4. $S^* = T' \cup \{v'\} \subseteq W'$ (eli $(w', v') \in R'$) ja $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M}',v'} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},u}$ jollain $u \in T$. Koska $\mathcal{M}', w' \models \Box(\bigvee\{\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} \mid (w,v) \in R\})$ (eikä disjunktio voi olla tyhjä), niin on olemassa alkio $v \in W$, jolla $(w, v) \in R$ ja $v' \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Nyt on vielä taattava, että $v \in W$ voidaan valita niin, ettei se kuulu joukkoon T. Olkoon $i = |\{v'' \in T' \mid \varphi^{n,m}_{\mathcal{M}',v''} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M}',v'}\}|$. Nyt $\mathcal{M}', w' \models \triangleleft_{\geq i+1}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$, joten ei voi olla voimassa $\mathcal{M}, w \models \triangleleft_{\leq i}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Siispä $\mathcal{M}, w \models \triangleleft_{\geq i+1}\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Koska peliä pelataan niin, että vastinpisteet toteuttavat samat hintikkakaavat, täytyy olla olemassa joukon T ulkopuolinen piste u, jolla $\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},u} = \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},v}$. Nyt $\exists$ valitsee joukon $S = T \cup \{u\}$, ja joukon T kuvaavaa bijektiota voidaan laajentaa bijektioksi $S \to S^*$ asettamalla $f(u) = v'$, eikä $\exists$ näin meneteltäessä häviä tällä kierroksella.

Kaikissa tapauksissa bijektiota saadaan laajennettua niin, että sen mukaiset vastinpisteet toteuttavat samat Hintikka-kaavat. Siispä induktio-oletuksen nojalla pelaajalla $\exists$ on voittostrategia loppupelissä, valitsipa $\forall$ seuraavan pelattavan pisteen miten tahansa. Induktioperiaatteen nojalla implikaatio (iii) $\Rightarrow$ (i) on todistettu. $\square$

Määritellään seuraavaksi laskentaoperaattoreilla vahvistetun modaalilogiikan tapaukseen sopiva p-morfisten kuvien vastine.

Määritelmä 6.5 Olkoot $\langle W, R\rangle$ ja $\langle W', R'\rangle$ Kripke-kehyksiä. Kuvaus $f : W \to W'$ on *g-morfismi*, jos se on g-bisimulaatio.

Huomautus 3 Korkeintaan numeroituvien puumallien[14] juurien välinen g-bisimulaatio on isomorfismi [5, Lemma 4.4.8, s. 41]. Yleisesti surjektiivinen g-morfismi ei kuitenkaan ole isomorfismi.

[14] Malli $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ on puumalli, jos sillä on olemassa yksikäsitteinen juuri, sen muilla alkioilla on yksikäsitteinen R-edeltäjä ja R on asyklinen.

Esimerkki 11 Olkoot $\mathcal{F} = \langle \{w\}, \{(w, w)\} \rangle$ ja $\mathcal{G} = \langle W, R \rangle$, missä $W = \mathbf{N}$ ja $R = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbf{N}\}$. Kuvaus $f : W \to \{w\}, f(i) = w$ on surjektiivinen g-morfismi, mutta ei kuitenkaan ole isomorfismi.

Kielen laajentaminen ei vaikuta erillisten yhdisteiden eikä generoitujen alimallien määrittelyyn. Koska kielen laajennus on kuitenkin vaikuttanut bisimulaation (ja morfismin) käsitteeseen, on kuitenkin hyvä tarkistaa, pitävätkö luvun 2 perustulokset edelleen paikkansa.

Propositio 6.1 GML-*kehysvalidisuus säilyy kattavissa kehysten välisissä g-bisimulaatioissa.*

Todistus. Olkoon Z kehysten $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ ja $\mathcal{F}' = \langle W', R' \rangle$ välinen $\mathcal{F}'$-kattava g-bisimulaatio ja olkoon kaava φ validi kehyksessä $\mathcal{F}$. Jos nyt kaava φ ei olisi validi kehyksessä $\mathcal{F}'$, olisi olemassa kehyksen $\mathcal{F}'$ malli $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}', V' \rangle$ ja sen piste v', joilla $\mathcal{M}', v' \not\models \varphi$. Määritellään kehykseen $\mathcal{F}$ valuaatio V ehdon

$$u \in V(p) \Leftrightarrow (u \in dom(Z) \text{ ja } Z(u) \in V'(p))$$

avulla ja asetetaan $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$. Nyt määritelmän 6.2 ehto (i) on voimassa, koska Z on määrittelyjoukossaan funktio, joten Z on g-bisimulaatio myös mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä. Koska Z on $\mathcal{F}'$-kattava, on olemassa sellainen $v \in W$, että $(v, v') \in Z$. Proposition [11, 3.3] nojalla (g-bisimilaariset) pisteet v ja v' toteuttavat täsmälleen samat kaavat. Siispä $\mathcal{M}, v \models \neg\varphi$, mikä on ristiriita, sillä $\mathcal{M}$ on kehyksen $\mathcal{F}$ malli ja oletettiin, että $\mathcal{F} \models \varphi$. □

Seuraus 6.1 GML-*kehysvalidisuus säilyy generoiduissa alimalleissa ja g-morfisissa kuvissa.*

Todistetaan vielä, että GML-kehysvalidisuus säilyy erillisissä yhdisteissä.

Propositio 6.2 GML-*kehysvalidisuus säilyy erillisissä yhdisteissä.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{F} = \biguplus_i \mathcal{F}_i$ kehysten $\mathcal{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle$ $(i \in I)$ erillinen yhdiste ja $\mathcal{F}_i \models \varphi$ jokaisella $i \in I$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa kehyksen $\mathcal{F}$ malli $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ ja sen piste (w, i), joilla $\mathcal{M}, (w, i) \not\models \varphi$. Määritellään kehyksen $\mathcal{F}_i$ malliin $\mathcal{M}_i$ valuaatio ehdon $v \in V_{\mathcal{F}_i}(p) \Leftrightarrow (v, i) \in V(p)$ avulla. Koska validisuus säilyy generoiduissa alimalleissa, φ on validi myös kehyksen $\mathcal{F}_i$ pisteen w generoimassa alikehyksessä. Mutta identtinen kuvaus on g-bisimulaatio generoitujen alimallien $\mathcal{M}_{(w,i)}$ ja $(\mathcal{M}_i)_w$ välillä, joten $\mathcal{F}_i \not\models \varphi$, mikä on ristiriita. □

Propositio 6.3 *Jokainen kehys voidaan esittää pistegeneroitujen kehysten erillisen yhdisteen g-morfisena kuvana.*

Todistus. Todistukseksi riittää huomata, että proposition 2.6 (s. 8) todistuksessa käytetty kuvaus on myös g-bisimulaatio. □

Määritellään seuraavaksi m-saturoituvuuden (määritelmä 3.3, s. 15) vastine laskentaoperaattoreilla vahvistetun modaalilogiikan tapaukseen.

Määritelmä 6.6 Kaavajoukko Σ on *n-toteutuva* (joukossa X), jos on olemassa vähintään n (joukon X) pistettä, joissa se toteutuu. Kaavajoukko Σ on *äärellisesti n-toteutuva*, jos sen jokainen äärellinen osajoukko on n-toteutuva. Malli $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ on *g-saturoitu*, jos jokainen kaavajoukko Σ, joka on äärellisesti n-toteutuva pisteen $w \in W$ seuraajien joukossa, on myös n-toteutuva pisteen w seuraajien joukossa.

Lemma 6.2 *Äärellisesti haarautuvat mallit ovat myös g-saturoituja.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ äärellisesti haarautuva malli ja Σ kaavajoukko. Oletetaan, että Σ on äärellisesti n-toteutuva pisteen $w \in W$ seuraajien joukossa. Olkoon S pisteen w R-seuraajien joukko. Oletuksen mukaan $|S| \geq n$. Tehdään nyt vastaoletus, jonka mukaan Σ ei ole n-toteutuva pisteen w seuraajien joukossa ja olkoon $S' = \{v_1, \ldots, v_i\}$ niiden pisteiden joukko, joissa Σ ei ole tosi. Koska Σ ei ole tosi joukon S' pisteissä, on kullakin v_j olemassa kaava $\psi_j \in \Sigma$, jolla $v_j \not\models \psi_j$. Nyt jokaisella joukon S' pisteellä v_j on voimassa $v_j \not\models \bigwedge_{1 \leq k \leq i} \psi_k$. Toisaalta $\{\psi_k \mid 1 \leq k \leq i\}$ on joukon Σ äärellinen osajoukko, joten oletuksen mukaan se on n-toteutuva pisteen w seuraajien joukossa. Tämä on ristiriita sillä $|S - S'| < n$. Siispä vastaoletus on väärä ja Σ on n-toteutuva pisteen w seuraajien joukossa. Näin on osoitettu, että $\mathcal{M}$ on g-saturoitu. □

De Rijke [11, Lemma 4.2] todisti, että ω-saturoitujen mallien pisteiden välinen kaavaekvivalenssi on myös g-bisimulaatio. g-saturoituvuuden käsitteen avulla pärjätään käymättä ensimmäisen kertaluvun logiikan puolella.

Propositio 6.4 *Olkoot $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ g-saturoituja malleja ja w, w' niiden pisteitä, joilla $\mathcal{M}, w \equiv_g \mathcal{M}', w'$. Tällöin $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_g \mathcal{M}', w'$.*

Todistus. Osoitetaan, että $Z = \{(v, v') \mid v \equiv_g v'\}$ on g-bisimulaatio mallien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ pisteiden w, w' välillä.

(i) Oletuksen mukaan Z on epätyhjä ja relaation Z määritelmän mukaan pisteet v ja v' toteuttavat samat propositiosymbolit aina, kun $(v, v') \in Z$.

(ii) Oletetaan, että $(v, v') \in Z$ ja $S \subseteq \{u \mid (v, u) \in R\}$ on äärellinen. Luetellaan joukon $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ pisteiden tyypit[15] $tp_1, tp_2, \ldots, tp_k$ ja olkoot $i_1, i_2, \ldots, i_k$ vastaavasti tyyppien kertaluvut, jotka kertovat kuinka monella joukon S pisteellä on sama tyyppi.

Tarkastellaan mielivaltaista tyyppiä tp_j, $1 \leq j \leq k$. Koska $i_j \in \mathbf{N}$ ja $(v, u) \in R$, niin $v \models \triangleleft_{\geq i_j} \bigwedge \delta$ jokaisella äärellisellä $\delta \subseteq tp_j$. Koska pisteet v ja v' toteuttavat samat GML-kaavat, sama pätee myös pisteellä v'. Siispä tp_j on äärellisesti i_j-toteutuva pisteen v' seuraajien joukossa. Koska $\mathcal{M}'$ on g-saturoitu malli, tp_j on nyt myös i_j-toteutuva pisteen v' seuraajien joukossa. Poimitaan nyt pisteen v' seuraajien joukosta sellainen joukko S', että sen tyypit ja niiden kertaluvut täsmäävät joukon S tyyppien ja niiden kertalukujen kanssa. Näin ehto $|S| = |S'|$ on voimassa ja edelleen $\forall u \in S : \exists u' \in S' : (u, u') \in Z$ ja $\forall u' \in S' : \exists u \in S : (u, u') \in Z$.

(iii) Symmetrinen tapauksen (ii) kanssa.

Kohtien (i)-(iii) nojalla Z on g-bisimulaatio. □

Todistetaan seuraavaksi seuraukselle 4.3 analoginen Golblatt-Thomasonin lauseen versio.

Lause 6.2 GML-*kompakti kehysluokka* K *on* GML-*määriteltävissä suhteessa äärellisesti haarautuvien kehysten luokkaan* K_{imfi} *täsmälleen silloin, kun se on suljettu* g*-morfisten kuvien, generoitujen alikehysten ja erillisten yhdisteiden suhteen.*

Todistus. Olkoon K GML-kompakti kehysluokka. Jos K on GML-määriteltävissä, niin se on toteuttaa mainitut sulkeumaehdot aiemmin esitettyjen huomautusten nojalla.

Oletetaan sitten, että K on suljettu g-morfisten kuvien, generoitujen alikehysten ja erillisten yhdisteiden suhteen. Olkoon $\Phi = \{p_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ ja $\Lambda_K = \{\varphi \in \text{GML}[\Phi] \mid \mathcal{F} \models \varphi$ jokaisella $\mathcal{F} \in K\}$. Osoitetaan, että Λ_K GML-määrittelee kehysluokan K. Selvästi implikaatio $\mathcal{F} \in K \Rightarrow \mathcal{F} \models \Lambda_K$ on voimassa, joten riittää todistaa käänteinen suunta $\mathcal{F} \models \Lambda_K \Rightarrow \mathcal{F} \in K$ äärellisesti haarautuville kehyksille.

[15]Pisteen u tyyppi on niiden kaavojen joukko, jotka ovat tosia pisteessä u.

Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ äärellisesti haarautuva kehys, jolla $\mathcal{F} \models \Lambda_K$ on voimassa. Koska jokainen kehys voidaan esittää pistegeneroitujen alikehystensä erillisen yhdisteen g-morfisena kuvana ja luokka K on suljettu näiden ominaisuuksien suhteen, riittää tarkastella pisteen generoimia kehyksiä. Voidaan siis olettaa, että $\mathcal{F}$ on pisteen w generoima. Olkoon $\mathcal{M}$ kehyksen $\mathcal{F}$ erotteleva malli. Olkoon $\Delta = \{\varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w} \in \mathrm{GML}[\Phi] \mid m, n \in \mathbf{N}\}$[16] vastaava n, m-Hintikka-kaavojen joukko. Osoitetaan, että Δ on (äärellisesti) toteutuva luokassa K.

Valitaan äärellinen $\delta \subseteq \Delta$. Jos δ ei olisi toteutuva luokassa K, olisi $\neg\bigwedge\delta$ validi luokassa K. Tällöin olisi voimassa $\neg\bigwedge\delta \in \Lambda_K$. Koska $\mathcal{F} \models \Lambda_K$, niin tällöin $\mathcal{F} \models \neg\bigwedge\delta$, mikä on ristiriita, sillä kehyksen $\mathcal{F}$ mallilla $\mathcal{M}$ pätee $\mathcal{M}, w \models \bigwedge\delta$. Siispä Δ on äärellisesti toteutuva luokassa K. Nyt kompaktisuuden nojalla on olemassa kehys $\mathcal{G} = \langle W_N, R_N\rangle \in K$ ja sen malli $\mathcal{N} = \langle W_N, R_N, V_N\rangle$ ja piste $v \in W_N$, joka toteuttaa joukon Δ. Koska K on suljettu generoitujen alikehysten suhteen, voidaan olettaa, että $\mathcal{G}$ on pisteen v generoima. Nyt $\mathcal{N}, v \models \varphi^{n,m}_{\mathcal{M},w}$ jokaisella n ja m, joten lemman 6.1 nojalla pisteet w ja v ovat n-g_m-bisimilaariset jokaisella n ja m ja toteuttavat siis täsmälleen samat GML-kaavat.

Osoitetaan nyt, että jokaista mallin $\mathcal{N}$ pistettä v' kohti on olemassa mallin $\mathcal{M}$ piste w', joka toteuttaa täsmälleen samat modaalilogiikan kaavat. Valitaan mielivaltainen mallin $\mathcal{N}$ piste v'. Koska $\mathcal{N}$ on pisteen v generoima, on olemassa R_N-polku pisteestä v pisteeseen v'. Merkitään tämän polun pituutta luvulla k. Tarkastellaan nyt peliä $G_{k+n,m}((\mathcal{N}, v), (\mathcal{M}, w))$, jossa pelaaja $\forall$ valitsee ensimmäiset k joukkoa ja pistettä niin, että hän etenee polkua $v \ldots v'$. Koska $\mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow}^n_{g_m} \mathcal{N}, v$ on voimassa jokaisella n, m pelaajalla $\exists$ on voittostrategia tässä pelissä jokaisella n ja m. Koska $\mathcal{M}$ on äärellisesti haarautuva malli, on olemassa mallin $\mathcal{M}$ sellainen piste w', että pelaajan $\exists$ voittostrategian mukainen vastine tässä pelissä pisteelle v' on w' mielivaltaisen suurilla luvun n arvoilla. Valitaan tällainen $w' \in W$. Nyt pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $G_{n,m}((\mathcal{N}, v'), (\mathcal{M}, w'))$, joten pisteet v' ja w' ovat n-g_m-bisimilaariset jokaisella n ja m ja näin ollen toteuttavat täsmälleen samat GML-kaavat.

Määritellään (epätyhjä) relaatio $Z = \{(v', w') \in W_N \times W \mid v' \equiv_g w'\}$ ja osoitetaan, että Z on itseasiassa surjektiivinen g-morfismi. Edellä todetun perusteella jokaista $v' \in W_N$ kohti on olemassa $w' \in W$, jolla $(v', w') \in Z$. Koska $\mathcal{M}$ on erotteleva malli, kuva $Z(v') = w'$ on lisäksi yksikäsitteinen.

Osoitetaan sitten, että Z on surjektio. Valitaan mielivaltainen $w_1 \in W$.

[16]Huomaa, että tässä Hintikka-kaavat määritellään itseasiassa erottelevan mallin n-rajoittumassa käytössä olevien propositiosymboleiden suhteen, joita on kullakin tasolla käytössä vain äärellinen määrä, koska $\mathcal{M}$ on äärellisesti haarautuva malli. Nämä kaavat voidaan kuitenkin yhdenmukaisesti kääntää GML[Φ]-kaavoiksi, mikä oletetaan tässä tehdyksi.

Nyt $\mathcal{M}, w_1 \models p_{w_1}$ ja on olemassa polku pisteestä w pisteeseen w_1. Siispä $\mathcal{M}, w \models \Diamond^n p_{w_1}$ jollain $n \in \mathbf{N}$. Koska pisteet w ja v toteuttavat samat kaavat, $\mathcal{N}, v \models \Diamond^n p_{w_1}$. Siispä on olemassa mallin $\mathcal{N}$ piste v_1, jolla $\mathcal{N}, v_1 \models p_{w_1}$. Koska Z on kuvaus, on olemassa kehyksen $\mathcal{F}$ piste w_2, jolla $Z(v_1) = w_2$. Koska $\mathcal{M}$ on erotteleva malli ja kuvauksen Z vastinpisteet toteuttavat samat kaavat, on oltava $w_2 = w_1$. Siispä Z on surjektio.

Osoitetaan vielä, että Z on g-bisimulaatio.

(i) Jos $(v', w') \in Z$, niin relaation Z määritelmän nojalla v' ja w' toteuttavat samat GML-kaavat ja siis myös samat propositiosymbolit.

(ii) Oletetaan, että $(v_1, w_1) \in Z$ ja $S \subseteq \{v_2 \in W_N \mid (v_1, v_2) \in R_N\}$ on äärellinen. Olkoot $tp_1, tp_2, \ldots, tp_k$ joukon S pisteiden tyypit ja olkoot $i_1, i_2, \ldots, i_k$ vastaavasti tyyppien kertaluvut.

Tarkastellaan joukon S pisteen u tyyppiä tp_j, $1 \leq j \leq k$. Koska $i_j \in \mathbf{N}$ ja $(v_1, u) \in R_N$, niin $v_1 \models \triangleleft_{\geq i_j} \bigwedge \delta$ jokaisella äärellisellä $\delta \subseteq tp_j$. Koska pisteet v_1 ja w_1 toteuttavat samat GML-kaavat, sama pätee myös pisteellä w_1. Nyt tp_j on äärellisesti i_j-toteutuva pisteen w_1 seuraajien joukossa. Koska $\mathcal{M}$ on lemman 6.2 nojalla g-saturoitu malli, tp_j on nyt myös i_j-toteutuva pisteen w_1 seuraajien joukossa. Poimitaan nyt pisteen w_1 seuraajien joukosta sellainen joukko S', että sen tyypit ja niiden kertaluvut täsmäävät joukon S tyyppien ja niiden kertalukujen kanssa. Näin ehto $|S| = |S'|$ on voimassa ja edelleen $\forall u \in S : \exists u' \in S' : (u, u') \in Z$ ja $\forall u' \in S' : \exists u \in S : (u, u') \in Z$.

(iii) Oletetaan, että $(v_1, w_1) \in Z$ ja $S' \subseteq \{w_2 \in W \mid (w_1, w_2) \in R\}$ on äärellinen. Tarkastellaan mielivaltaista pistettä $w_2 \in S'$. Koska $\mathcal{M}$ on erotteleva malli, $\mathcal{M}, w \models p_{w_2}$. Siispä $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond p_{w_2}$. Koska pisteet v_1 ja w_1 toteuttavat täsmälleen samat kaavat, $\mathcal{N}, v_1 \models \Diamond p_{w_2}$. Siispä on olemassa pisteen v_1 R-seuraaja v_2, jolla $\mathcal{N}, v_2 \models p_{w_2}$. Koska Z on kuvaus, on olemassa piste $w_3 \in W$, jolla $Z(v_2) = w_3$. Nyt $\mathcal{M}, w_3 \models p_{w_2}$, joten koska $\mathcal{M}$ on erotteleva malli, on oltava $w_3 = w_2$. Siispä jokaista joukon S' pistettä w_2 kohti on olemassa mallin $\mathcal{N}$ piste v_2, jolla $(v_1, v_2) \in R_N$ ja $Z(v_2) = w_2$. Poimitaan nyt joukkoon S tällainen piste jokaista joukon S' pistettä kohti. Koska Z on kuvaus $W_N \to W$, täytyy jokaista joukon S' pistettä kohti löytyä eri piste. Siispä $|S| = |S'|$ ja lisäksi $\forall u \in S : \exists u' \in S' : (u, u') \in Z$ ja $\forall u' \in S' : \exists u \in S : (u, u') \in Z$.

Kohtien (ii) ja (iii) nojalla Z on g-bisimulaatio kehysten $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ välillä. Näin on osoitettu, että kehys $\mathcal{F}$ on kehyksen $\mathcal{G} \in K$ g-morfinen kuva. $\square$

Määritelmän 2.6 standardikäännös ST_x voidaan laajentaa (ks. [11, s. 2–3]) koskemaan myös laskentaoperaattoreita lisäämällä ehto

$$ST_x(\triangleleft_{\geq n}\phi) = \exists y_1 \ldots \exists y_n \left(\bigwedge_{1\leq i\neq j\leq n} (y_i \neq y_j) \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq n} (R(x, y_i) \wedge ST_{y_i}(\phi)) \right)$$

Lauseen 4.1 tapaan elementaariset kehysluokat voidaan osoittaa myös GML-kompakteiksi.

Lause 6.3 *Elementaariset kehysluokat ovat* GML-*kompakteja.*

Todistus. Olkoon K elementaarinen kehysluokka ja Δ äärellisesti luokassa K toteutuva GML-kaavojen joukko. Olkoon $\mathcal{A} = \{P_p \mid p \in \Phi\} \cup \{R\} \cup \{c\}$ tarkasteltavaa modaalilogiikan similariteettityyppiä vastaava ensimmäisen kertaluvun logiikan aakkosto, johon on lisätty yksi vakiosymboli c ja olkoon $T_\Delta = \{ST_c(\varphi) \mid \varphi \in \Delta\}$ joukon Δ kaavojen standardikäännöksiä vastaava ensimmäisen kertaluvun logiikan teoria.

Koska K on elementaarinen kehysluokka, on olemassa aakkoston $\mathcal{A}$ teoria T, jolla $K = Mod(T)$. Nyt $T \cup T_\Delta$ on aakkoston $\mathcal{A}$ teoria. Osoitetaan, että jokaisella äärellisellä $T_0 \subseteq T \cup T_\Delta$ on olemassa $\mathcal{A}$-malli M_0, jolla $M_0 \models T_0$.

Olkoon $T_0 \subseteq T \cup T_\Delta$ äärellinen. Merkitään $\delta = T_0 \cap T_\Delta$ ja olkoon $\delta_{\mathrm{GML}} = \{\varphi \mid \varphi$ on GML-kaava ja $ST_c(\varphi) \in \delta\}$. Nyt $\delta_{\mathrm{GML}} \subseteq \Delta$ on äärellinen, joten oletuksen mukaan on olemassa kehys $\langle W, R\rangle \in K$, valuaatio V ja piste $w \in W$, joilla

$$\langle W, R, V\rangle, w \models \bigwedge \delta_{\mathrm{GML}}.$$

Tällöin standardikäännöksen ominaisuuksien [11, s. 3] nojalla

$$M_0 = (W, R, (V(p))_{p\in\Phi}, w) \models \bigwedge \delta.$$

Lisäksi $\langle W, R\rangle \in K$, joten $M_0 \models T$. Siispä $M_0 \models T \cup \delta$ eli $M_0 \models T_0$.

Koska teoria $T \cup T_\Delta$ on äärellisesti toteutuva, on se predikaattilogiikan kompaktisuuslauseen nojalla toteutuva jossain aakkoston $\mathcal{A}$ mallissa $M = (W, R^W, (P^W)_{p\in\Phi}, c^W)$. Nyt erityisesti $(W, R^W) \models T$, joten $(W, R^W) \in K$. Lisäksi koska $M \models T_\Delta$, saadaan

$$\langle W, R, V\rangle, w \models \Delta,$$

missä $R = R^W$, $w = c^W$ ja $V(p) = P^W$, kun $p \in \Phi$. $\square$

Seuraus 6.4 *Elementaariset kehysluokat ovat* GML-*määriteltävissä*[17] *suhteessa äärellisesti haarautuvien kehysten luokkaan täsmälleen silloin, kun ne ovat suljettuja g-morfisten kuvien, generoitujen alikehysten ja erillisten yhdisteiden suhteen.*

Huomautus 4 Huomautuksesta 1 seuraa, ettei äärellisesti haarautuvien kehysten luokka ole myöskään GML-kompakti. Hivenen yksinkertaisemman vastaesimerkin tarjoaa kaavajoukko $\{\triangleleft_{\geq i}\top \mid i \in \mathbf{N}\}$.

Yleistetään seuraavaksi Jankov-Fine kaavat ja polkukvanttorin käyttö laskentaoperaattoreita käyttävän ja äärettömät disjunktiot ja konjunktiot sallivan modaalilogiikan tapaukseen.

Määritelmä 6.7 Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ kehys ja $w \in W$ sen piste. Olkoon $\Phi = \{p_v \mid v \in \mathcal{F}_w\}$. Määritellään erotteleva malli $\mathcal{M}^{\mathcal{F}} = \langle \mathcal{F}_w, V\rangle$, missä $V(p_v) = \{v\}$, kun $v \in \mathcal{F}_w$. Olkoon φ kaavojen

(i) $\bigvee_{v\in\mathcal{F}_w} p_v$,

(ii) $\bigwedge_{v\neq q}(p_v \to \neg p_q)$,

(iii) $\bigwedge_{(v,q)\in R}(p_v \to \triangleleft_{=1} p_q)$,

(iv) $\bigwedge_{(v,q)\notin R}(p_v \to \neg\Diamond p_q)$

konjunktio. Määritellään $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w} = p_w \wedge A\varphi$.

Lemma 6.3 *Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ kehys, $w \in W$, $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$ määritelmän 6.7 mukainen kaava ja $\mathcal{G} = \langle W_{\mathcal{G}}, R_{\mathcal{G}}\rangle$ kehys, jonka malli $\mathcal{N} = \langle \mathcal{G}, V\rangle$ toteuttaa kaavan $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$ pisteessään v. Tällöin $\mathcal{F}_w$ on kehyksen $\mathcal{G}_v$ g-morfinen kuva.*

Todistus. Määritellään $f(v') = u$, kun $v' \in V(p_u)$, ja osoitetaan, että f on surjektiivinen g-morfismi $\mathcal{G}_v \to \mathcal{F}_w$.

Osoitetaan ensin, että f on funktio. Valitaan mielivaltainen $v' \in W_{\mathcal{G}_v}$.

(i) Jos $v' = v$, niin oletuksen mukaan $v' \in V(p_w)$ $(\mathcal{N}, v \models p_w)$. Lisäksi $\mathcal{N}, v' \models p_w \to \neg p_u$, kun $u \neq w$, joten $v' \notin V(p_u)$, kun $u \neq w$.

(ii) Jos $v' \neq v$, niin on olemassa $R_{\mathcal{G}}$-polku pisteestä v pisteeseen v'. Nyt $\mathcal{N}, v' \models (\bigvee_{u\in\mathcal{F}_w} p_u) \wedge (\bigwedge_{u\neq q}(p_u \to \neg p_q))$. Siispä $v' \in V(p_u)$ täsmälleen yhdellä $u \in \mathcal{F}_w$.

[17] Tässä oletetaan aiemmista analogioista tuttuun tapaan, että käytössä on numeroituvasti ääretön joukko propositiosymboleja.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla f on hyvinmääritelty kuvaus.

Osoitetaan sitten, että f on surjektio. Valitaan mielivaltainen $u \in W_{\mathcal{F}_w}$.

(i) Jos $u = w$, niin $f(v) = u$.

(ii) Jos $u \neq w$, niin on olemassa R-polku $w = w_0 R w_1 R \ldots R w_n = u$ pisteestä w pisteeseen u. Osoitetaan induktiolla polun pituuden suhteen, että jokainen polun piste $w_i \in W$ on jonkun kehyksen $\mathcal{G}_v$ pisteen v_i f-kuva. Kohdan (i) perusteella väite on voimassa, kun polun pituus on 0. Oletetaan, että väite pätee, kun polun pituus on $k < n$. Nyt $\mathcal{N}, v_k \models p_{w_k} \wedge (p_{w_k} \to \Diamond p_{w_{k+1}})$, joten on olemassa sellainen $v_{k+1} \in W_{\mathcal{G}_v}$, että $(v_k, v_{k+1}) \in R_{\mathcal{G}_v}$ ja $\mathcal{N}, v_{k+1} \models p_{w_{k+1}}$. Tällöin $f(v_{k+1}) = w_{k+1}$.

Kohtien (i) ja (ii) nojalla f on surjektio.

Osoitetaan vielä, että f on g-morfismi $\mathcal{G}_v \to \mathcal{F}_w$.

(ii) Oletetaan, että $(v_1, w_1) \in f$ ja $S \subseteq \{v_2 \in W_{\mathcal{G}_v} \mid (v_1, v_2) \in R_{\mathcal{G}}\}$ on äärellinen. Asetetaan $S' = \{f(v_2) \mid v_2 \in S\}$. Valitaan mielivaltainen $w_2 \in S'$. Nyt $w_2 = f(v_2)$ jollain $v_2 \in S$. Jos olisi voimassa $(w_1, w_2) \notin R$, niin $\mathcal{N}, v_1 \models p_{w_1} \to \neg\Diamond p_{w_2}$. Mutta $\mathcal{N}, v_1 \models p_{w_1} \wedge \Diamond p_{w_2}$. Siispä $(w_1, w_2) \in R$ ja $S' \subseteq \{w_2 \mid (w_1, w_2) \in R\}$. Selvästi $|S| \geq |S'|$, $\forall v_2 \in S : \exists w_2 \in S' : (v_2, w_2) \in f$ ja $\forall w_2 \in S' : \exists v_2 \in S : (v_2, w_2) \in f$. Osoitetaan vielä, että $|S| \leq |S'|$. Oletetaan, että joillain $v_2, v_3 \in S$ pätee $f(v_2) = f(v_3) = w_2$. Koska $(w_1, w_2) \in R$, niin $v_1 \models p_{w_1} \to \lhd_{=1} p_{w_2}$. Siispä on oltava $v_2 = v_3$.

(iii) Oletetaan sitten, että $(v_1, w_1) \in f$ ja $S' \subseteq \{w_2 \in W_{\mathcal{F}_w} \mid (w_1, w_2) \in R\}$ on äärellinen. Asetetaan $S = \{v_2 \in W_{\mathcal{G}_v} \mid \exists w_2 \in S' : v_2 \in f^{-1}(w_2)\} \cap \{v_2 \in W_{\mathcal{G}_v} \mid (v_1, v_2) \in R_{\mathcal{G}}\}$. Valitaan mielivaltainen $w_2 \in S'$. Koska $v_1 \models p_{w_1} \to \lhd_{=1} p_{w_2}$, on olemassa täsmälleen yksi v_2, jolla $(v_1, v_2) \in R_{\mathcal{G}}$ ja $v_2 \models p_{w_2}$. Koska f on kuvaus ja $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ erotteleva malli, täytyy olla $f(v_2) = w_2$. Siis $v_2 \in S'$, $|S| = |S'|$ ja $\forall w_2 \in S' : \exists v_2 \in S : (v_2, w_2) \in f$. Valitaan nyt $v_2 \in S$. Joukon S määritelmän mukaan on olemassa $w_2 \in S'$, jolla $(v_2, w_2) \in f$. Siispä $\forall v_2 \in S : \exists w_2 \in S' : (v_2, w_2) \in f$.

Kohtien (ii) ja (iii) nojalla f on g-morfismi. $\square$

Seuraus 6.5 *Olkoon Φ numeroituvasti ääretön joukko propositiosymboleja. Generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja g-morfisten kuvien suhteen suljettu kehysluokka on määriteltävissä äärellisten kehysten luokan suhteen yksinkertaisten μGML$[\Phi]$-kaavojen avulla.*

Todistus. Olkoon K kehysluokka, joka toteuttaa mainitut sulkeumaehdot ja olkoon $\mathcal{F}$ äärellinen kehys, jolla $\mathcal{F} \models \Lambda_K = \{\phi \in \mu\mathrm{GML}[\Phi] \mid \mathcal{G} \models \phi$ jokaisella $\mathcal{G} \in K\}$. Koska $\mathcal{F}$ saadaan pistegeneroitujen kehystensä erillisen yhdisteen g-morfisena kuvana ja luokka K on suljettu näiden operaatioiden suhteen, rittää todistaa väite pistegeneroiduille malleille. Voidaan siis olettaa, että $\mathcal{F}$ on pisteen w generoima. Olkoon $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$ määritelmän 6.7 mukainen kaava. Koska $\mathcal{F}$ on äärellinen kehys, kaava $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$ sisältää vain äärellisen määrän propositiosymboleja. Se voidaan siis kääntää yhdenmukaisesti $\mu\mathrm{GML}[\Phi]$-kaavaksi. Koska oletus $K \models \neg\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$, johtaisi ristiriitaan $\mathcal{F} \models \neg\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$, täytyy olla olemassa luokan K kehys $\mathcal{G}$, joka toteuttaa kaavan $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$ pisteessään v. Lemma 6.3 nojalla, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_w$ on tällöin kehyksen $\mathcal{G}_v$ g-morfinen kuva, joten luokan K sulkeumaehtojen nojalla $\mathcal{F} \in K$. □

Seuraus 6.6 *Olkoon Φ joukko propositiosymboleja, jonka koko on vähintään κ. Generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja g-morfisten kuvien suhteen suljettu kehysluokka on määriteltävissä $\mathrm{GML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavojen avulla suhteessa kehysluokkaan K_κ, jonka kehysten koko on korkeintaan κ.*

Todistus. Olkoon K kehysluokka, joka toteuttaa mainitut sulkeumaehdot ja olkoon $\mathcal{F} \in K_\kappa$ kehys, jolla $\mathcal{F} \models \Lambda_K = \{\phi \in \mathrm{GML}_{\infty,\omega}[\Phi] \mid \mathcal{G} \models \phi$ jokaisella $\mathcal{G} \in K\}$. Koska $\mathcal{F}$ saadaan pistegeneroitujen kehystensä erillisen yhdisteen g-morfisena kuvana ja luokka K on suljettu näiden operaatioiden suhteen, rittää todistaa väite pistegeneroiduille malleille. Voidaan siis olettaa, että $\mathcal{F}$ on pisteen w generoima. Olkoon $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$ määritelmän 6.7 mukainen kaava. Koska $\mathcal{F}$ on luokan K_κ kehys, kaava $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$ sisältää korkeintaan κ propositiosymbolia. Se voidaan siis kääntää yhdenmukaisesti $\mathrm{GML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavaksi. Koska oletus $K \models \neg\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$, johtaisi ristiriitaan $\mathcal{F} \models \neg\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$, täytyy olla olemassa luokan K kehys $\mathcal{G}$, joka toteuttaa kaavan $\psi^{GML}_{\mathcal{F},w}$ pisteessään v. Lemma 6.3 nojalla, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_w$ on tällöin kehyksen $\mathcal{G}_v$ g-morfinen kuva, joten luokan K sulkeumaehtojen nojalla $\mathcal{F} \in K$. □

Huomautus 5 Jos voidaan olettaa, että propositiosymboleita on käytössä tarpeeksi (Φ aito luokka) jokaisen kehyksen erottelevan mallin määrittelyyn ja jos sallitaan määriteltävyys aidolla kaavaluokalla, voidaan seurauksesta 6.6 poistaa kokorajoitteet. Tällöin saadaan tulos, jonka mukaan generoitujen alimallien, erillisten yhdisteiden ja g-morfisten kuvien suhteen suljettu kehysluokka on määriteltävissä $\mathrm{GML}_{\infty,\omega}[\Phi]$-kaavojen avulla.

7 Yhteenveto ja työn ulkopuolelle jääneitä kysymyksiä

Klassinen Goldblatt-Thomasonin lause kertoo, että elementaarinen kehysluokka on modaalisesti määriteltävissä täsmälleen silloin, kun se on suljettu p-morfisten kuvien, generoitujen alikehysten ja erillisten yhdisteiden suhteen sekä heijastaa ultrafiltterilaajennuksia. Tämän työn kantavana ideana oli luopua elementaarisuusoletuksesta ja ultrafiltterilaajennusten heijastamisesta. Tämä tehtiin rajoittamalla tarkasteltavia kehysluokkia, käyttämällä kompaktisuusoletusta sekä siirtymällä polkukvanttorin ja μ-kalkyylin kautta äärettömiin kieliin. Apuvälineinä todistuksissa käytettiin erottelevia malleja, Hintikka-kaavoja, Jankov-Fine-kaavojen yleistyksiä ja rajoitettuja bisimulaatiopelejä. Perinteisen modaalilogiikan tarkastelujen jälkeen vastaavat määrittelyt tehtiin myös laskentaoperaattoreita käyttävän modaalilogiikan (GML) tapaukseen ja todistettiin analogiset tulokset GML-määriteltävyyttä koskien.

Kun rajoitutaan kompakteihin kehysluokkiin, saadaan tulos, jonka mukaan $\mathrm{ML}[\Phi, \tau_0]$-määriteltävissä suhteessa äärellisesti haarautuvien kehysten luokkaan täsmälleen silloin, kun se on suljettu generoitujen alikehysten, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen. Vastaava tulos on voimassa myös GML-kaavojen ja g-morfisten kuvien suhteen.

Kompaktisuusoletuksesta päästään äärellisten kehysten luokassa eroon siirtymällä perusmodaalilogiikasta modaaliseen μ-kalkyyliin. Kehysluokka on μML-määriteltävissä suhteessa äärellisten kehysten luokkaan täsmälleen silloin, kun se on suljettu generoitujen alikehysten, erillisten yhdisteiden ja p-morfisten kuvien suhteen. Äärellisyysoletuksesta päästään eroon suoraviivaisesti ottamalla μ-kalkyylin vahvistukseksi äärettömät disjunktiot ja konjunktiot. Tällöin kuitenkin kiintopisteoperaattorit tulevat tarpeettomiksi, sillä polkukvanttori on $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}$-määriteltävissä. Äärettömiin kieliin siirryttäessä on lisäksi huomattava, että erottelevan mallin määrittelemiseksi tarkasteltavien kehysten koolle täytyy asettaa jonkin yläraja tai vaihtoehtoisesti sallia aito luokka propositiosymboleja ja määriteltävyys kaavaluokan avulla. Vastaavat tulokset ovat voimassa myös GML-kaavojen ja g-morfisten kuvien suhteen.

Tässä työssä käytetty määriteltävyyden käsite joutui koetukselle äärellisten ja transitiivisten kehysten yhteydessä. Siitä heräsi ajatus erotella määriteltävyys jossain luokassa C ($K \subseteq C$) ja jonkin luokan C suhteen ($K \nsubseteq C$). Tässä työssä käytettiin jälkimmäistä määrittelytapaa, mikä oli oleellista esimerkiksi seurauksen 4.3 yhteydessä. Jos nimittäin vaaditaan, että määriteltävä (kompakti) kehysluokka sisältyy äärellisesti haarautuvien kehysten luokkaan, rajataan käytettävissä olevien esimerkkien määrää merkittävästi. Äärellisesti haarautuvien kehysten luokkahan ei ole itsessään kompakti. Erottelemalla nämä kaksi määriteltävyyden käsitettä lemma 5.1 saa muodon, jonka mukaan kehysluokka K on määriteltävissä transitiivisten kehysten luokassa, äärellisten kehysten luokan suhteen täsmälleen silloin, kun se on suljettu erillisten yhdisteiden, generoitujen alimallien ja p-morfisten kuvien suhteen. Nyt voidaankin kysyä, mikä on näiden määriteltävyyden käsitteiden keskinäinen suhde ja edelleen, miten tuloksia tai niiden todistuksia joudutaan muokkaamaan, mikäli siirrytään käsitteestä toiseen. Vaatimus $K \subseteq C$ voi toisaalta helpottaa joitakin todistuksia, mutta toisaalta samalla rajata mahdolliset esimerkit hyvinkin yksinkertaisiin kehysluokkiin.

Hennessyn-Milnerin luokilla (ks. määritelmä 3.1, s. 15) modaalinen kaavaekvivalenssi on bisimulaatio. Esimerkissä 2 nähtiin, että kun käytössä on ääretön propositiosymboleiden joukko, kaavaekvivalenssi ei takaa edes n-bisimilaarisuutta. Nyt voidaankin kysyä, millaisia ovat ne malliluokat, joilla on voimassa ehto

$$\forall \mathcal{M}, \mathcal{M}' \in M : \forall w, w' : ((\mathcal{M}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}', w') \Rightarrow (\forall n : \mathcal{M}, w \rightleftharpoons_n \mathcal{M}', w')).$$

Esimerkiksi malliluokka, joka sisältää (vain) esimerkin 1 mallit, toteuttaa tämän ehdon, muttei kuitenkaan ole Hennesyn-Millnerin luokka. Edelleen voidaan kysyä, millaisissa tilanteissa kaavaekvivalenssi (tai joku muu sopivasti valittu yksi relaatio) on itsessään n-bisimulaatio jokaisella n. Vastaavat kysymykset voitaneen muotoilla myös n-g_m-bisimilaarisuuden yhteydessä. Tällöin voidaan määritellä g_m^ω-bisimulaation (n-g_m-bisimilaarisuuden välittämiseen riittää sama relaatio jokaisella n) ja g_ω^ω-bisimulaation (n-g_m-bisimilaarisuuden välittämiseen riittää sama relaatio jokaisella n ja m) käsitteet ja pohtia tarjoavatko ne lisävaloa mallien tarkasteluun ja vertailuun.

Luvussa 3 esiteltiin (mallien) ultrafiltterilaajennukset, jotka tuottavat aina m-saturoituja malleja. Laskentaoperettaatoreiden myötä luvussa 6 m-saturoituvuuden käsite laajennettiin g-saturoituvuudeksi. Nyt voidaankin kysyä, ovatko ultrafiltterilaajennukset myös g-saturoituja ja ellei näin ole, millaisella konstruktiolla sitten voidaan tuottaa g-saturoituja malleja. Näihin kysymyksiin vastaaminen voi osaltaan auttaa Goldblatt-Thomasonin lauseen suoran GML-analogian todistamisessa, ainakin siinä tapauksessa, että g-saturoituvuuden tuottava konstruktio on riittävän hyvin käyttäytyvä.

Lauseen 4.1 nojalla elementaariset kehysluokat ovat ML$[\Phi, \tau_0]$-kompakteja, mutta ovatko ML$[\Phi, \tau_0]$-kompaktit kehysluokat elementaarisia. Jos näin ei ole, miten konstruoidaan vastaesimerkki eli kehysluokka, joka on ML$[\Phi, \tau_0]$-kompakti, muttei ole elementaarinen. Entä jos Φ on äärellinen, onko silloin mikä tahansa kehysluokka ML$[\Phi, \tau_0]$-kompakti?

Kun tarkastellaan äärettömiä kieliä, n-Hintikka-kaavat ja peli $G_n((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$ voidaan yleistää mielivaltaisille ordinaaleille. Tätä peliä G_α pelataan seuraaja ordinaalien tapauksessa kuten peliä G_n, mutta rajaordinaalin tapauksessa $\forall$ valitsee pienemmän ordinaalin β, minkä jälkeen pelataan peliä G_β. Voidaan osoittaa, että äärettömät α-Hintikka-kaavat takaavat voittostrategian olemassaolon pelissä G_α. On hyvä huomata, että kun $\alpha \geq \omega$, nämä pelit G_α ovat mielivaltaisen pitkiä, mutta kuitenkin äärellisiä. Kun pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $G_\alpha((\mathcal{M}, w), (\mathcal{M}', w'))$, sanotaan, että pisteet w ja w' ovat α-bisimilaariset. Nyt voidaankin kysyä, löytyykö jokaisella ei-bisimilaarisella mallipiste-parilla sellainen α, jolla kyseessä olevat pisteet eivät ole α-bisimilaariset. Ja edelleen, onko jokaista (erottelevaa) mallia $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}$ ja sen pistettä w kohti olemassa kiinteä α, jolla α-Hintikka-kaava $\varphi^{\infty;\alpha}_{\mathcal{M}^{\mathcal{F}},w}$ riittää välittämään bisimilaarisuuden mihin tahansa malliin eli ehto

$$\forall \mathcal{N} \forall v : (\mathcal{N}, v \models \varphi^{\infty;\alpha}_{\mathcal{M}^{\mathcal{F}},w} \Rightarrow (\mathcal{M}, w \leftrightarroweq \mathcal{N}, v))$$

on voimassa.

Tässä esitetyt kysymykset ja pohdinnat tarjoavat yhden mahdollisen suunnan jatkotutkimukselle, jonka tuloksena on toivottavasti jonain päivänä väitöskirja.

Viitteet

[1] Blackburn, de Rijke, Venema: *Modal Logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] van Benthem, Johan: *Extensive Games as Process Models.* Journal of Logic, Language and Information 11: 289-313, 2002.

[3] Burris, Sankappanavar: *A Course in Universal Algebra.* The Millennium Edition.
http://www.math.uwaterloo.ca/ snburris/htdocs/UALG/univ-algebra.pdf (linkki 25.4.2005).

[4] Chang, Keisler: *Model Theory*, kolmas painos. Elsevier Science Publishers B.V., 1990.

[5] Conradie, Willem: *The Beth Property for Three Extensions of Modal Logic.* ILLC Publications, 2002.
http://www.illc.uva.nl/Publications/ResearchReports/MoL-2002-03.text.ps.gz

[6] *The Description Logic Handbook*. Ed. Baader et al. Cambridge University Press, 2003.

[7] Eronen, Mika: *Hilateoriaa.* Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto, Moniste B 50, 1. painos, 1999.

[8] Karvonen, Kivelä: *Modaalinen μ-kalkyyli*. Seminaariesitelmä 14.2.2003.
http://mtl.uta.fi/Opetus/seminaarit/logiikka/0203/mu_kalkyyli_esitelma_140203.pdf (linkki 17.5.2005)

[9] Kozen: *Results on the propositional mu-calculus*. Theoretical Computer Science 27, 1983.

[10] Rantala, Virtanen: *Johdatus modaalilogiikkaan*. Gaudeamus, 2004.

[11] de Rijke: *A Note on Graded Modal Logic*. Studia Logica 64(2):271-283, 2000. Saatavilla ps-muodossa
http://turing.wins.uva.nl/~mdr/Publications/Details/nogml.html (linkki 27.7.2005).

[12] Schild: *A Correspondence Theory for Terminological Logics: Preliminary Report*. Proceedings of IJCAI-91, 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1991.
http://citeseer.ist.psu.edu/schild91correspondence.html (linkki 17.5.2005)

[13] Stirling, Bradfield: *Modal Logics and mu-calculi: an introduction*. Teoksessa Handbook of Process Algebra, ed. Bergstra, Ponse & Smolka. Elsevier Science, 2001. Preprint osoitteessa
http://www.dcs.ed.ac.uk/home/jcb/Research/papers.html#HPA-preprint (linkki 20.7.2005).