TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Jonni Virtema

μ-kalkyyli - monadisen toisen kertaluvun predikaattilogiikan bisimilaarisesti invariantti fragmentti

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Marraskuu 2007

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

VIRTEMA, JONNI: μ-kalkyyli - monadisen toisen kertaluvun predikaattilogiikan bisimilaarisesti invariantti fragmentti

Pro gradu -tutkielma, 49 s.

Matematiikka

Marraskuu 2007

Tiivistelmä

Tutkielmassa esitellään μ-kalkyyli ja monadinen toisen kertaluvun predikaattilogiikka MSO. μ-kalkyylille esitetään sekä standardi- että peliteoreettinen semantiikka ja todistetaan näiden yhtäpitävyys. Tutkielmassa todistetaan myös, että jokainen $L\mu$-lause on bisimilaari-invariantti ja että vastaavaa ominaisuutta ei ole MSO-lauseilla. Lisäksi määritellään standardikäännös μ-kalkyyliltä monadiseen toisen kertaluvun predikaattilogiikkaan, siis näytetään, että jokaista $L\mu$-kaavaa vastaa ekvivalentti MSO-kaava, itseasiassa ekvivalentti MSO-lause. Tutkielmassa todistetaan myös, että jokaista bisimilaari-invarianttia MSO-lausetta vastaa ekvivalentti $L\mu$-kaava. Tutkielman päätuloksena onkin, että monadisen toisen kertaluvun predikaattilogiikan bisimilaari-invariantti fragmentti on täsmälleen μ-kalkyylin kaavojen bisimilaari-invariantti fragmentti. Avoimeksi kysymykseksi jää onko olemassa bisimilaari-invarianttia $L\mu$-kaavaa, jota ei vastaisi jokin ekvivalentti $L\mu$-lause, siis onko monadisen toisenkertaluvun predikaattilogiikan bisimilaari-invariantti fragmentti täsmälleen μ-kalkyyli, kun tarkastellaan ainoastaan lausemääriteltävyyttä. Walukiewiczin ja Janinin artikkelin [5] perusteella näin on.

Sisältö

1 Johdanto

μ-kalkyyli ei ole syntynyt modaalilogiikan filosofisesta traditiosta, vaan taustalla on modaali- ja aikalogiikoiden soveltaminen ohjelmien verifiointiin. Modaali- ja aikalogiikoita on käytetty ohjelmien verifioinnissa aina 1960-luvulta lähtien. Tunnetuimpia tähän tarkoitukseen kehitettyjä logiikoita ovat 1960-luvulla kehitelty Floyd-Hoare logiikka (FHL), 1970-luvulla kehitetyt propositionaalinen dynaaminen logiikka (PDL) ja Hennessy-Milner logiikka (HML), sekä 1980-luvulla kehitetty CTL. Dexter Kozen julkaisi 1983 tutkimuksen, jossa hän esitteli logiikan, joka yhdisti HML:n kaltaiset yksinkertaiset modaliteetit kiintopisteoperaattoreihin, jotka loivat eräänlaisen rekursion. Tämä logiikka on modaalinen μ-kalkyyli. Siitä tulikin todennäköisesti kaikkein tutkituin ohjelmien verifiointiin liittyvä aikalogiikka. Sillä on yksinkertainen syntaksi ja semantiikka, mutta samalla valtava ilmaisuvoima. Suurinosa muista aikalogiikoista, kuten CTL, onkin vain μ-kalkyylin fragmentti.

Tässä tutkielmassa käsitellään μ-kalkyyliä ja sen suhdetta monadiseen toisen kertaluvun predikaattilogiikkaan. Monadinen toisen kertaluvun predikaattilogiikka on ilmaisuvoimansa vahvuuden vuosi hyvä vertailukohta vertailtaessa erilaisten logiikoiden kuten μ-kalkyylin ilmaisuvoimaa. μ-kalkyyli on modaalilogiikka, johon on lisätty rekursiivisia ominaisuuksia lisäämällä modaalilogiikkaan suurin ja pienin kiintopisteoperaattori. Nämä rekursiiviset ominaisuudet lisäävät huomattavasti modaalilogiikan ilmaisuvoimaa, mutta myös vaikeuttavat logiikan ymmärtämistä. Kiintopisteoperaattorien merkitys lauseissa ei ole kovin intuitiivinen, jonka vuoksi tämän tutkielman luvussa 3.1.3 on esitelty peliteoreettinen näkökulma μ-kalkyyliin, jonka tarkoitus on selventää kiintopisteoperaattorien merkitystä μ-kalkyylissä. Sen lisäksi, että μ-kalkyyli on mielenkiintoinen matemaattisesta ja loogisesta näkökulmasta, on se myös paljon käytetty logiikka tietojekäsittelytieteessä. Monet systeemien verifioinnissa käytetyt logiikat ovatkin osa μ-kalkyyliä.

Tutkielman alussa määritellään lyhyesti tutkielman kannalta tärkeitä käsitteitä, sekä todistetaan joitakin myöhemmin käytettäviä aputuloksia. Luvussa 3.1 käsitellään μ-kalkyyliä. Aluksi esitellään funktion kiintopisteen käsite, jonka jälkeen siirrytään määrittelemään μ-kalkyylin standardisemantiikka. Tämän jälkeen lukijan ymmärtämystä μ-kalkyylin luonteesta syvennetään esittelemällä μ-kalkyylin peliteoreettinen semantiikka. Tämän jälkeen todistetaan standardi- ja peliteoreettisen semantiikan yhtäpitävyys. Luvun lopussa todistetaan joitakin μ-kalkyyliin liittyviä tärkeitä tuloksia.

Luvussa 3.2 esitellään lyhyesti monadinen toisen kertaluvun predikaattilogiikka, jonka jälkeen luvussa 3.3 esitellään ja todistetaan standardikäännös μ-kalkyyliltä monadiseen toisen kertaluvun predikaattilogiikkaan.

Luvussa 5 todistetaan tutkielman päätulos, että jokainen bisimilaarisesti suljettu MSO-määritelty luokka transitiosysteemejä on $L\mu$-kaavamääritelty. Tämä tulos on todistettu Walukiewiczin ja Janinin artikkelissa [5] ja se on uudelleen muotoiltu Rohden toimesta artikkelissa [6]. Todistuksessä käytetään hyväksi luvussa 4 esiteltyjä automaatteja. Edellä mainitut automaatit on kehittänyt Walukiewicz ja Janin (ks. [9] ja [4]).

Lukijan oletetaan olevan perehtynyt niin modaalilogiikkaan, ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaan kuin automaattien perusteisiinkin ja tuntevan näiden alojen peruskäsitteistöä. Lukijalta ei oleteta aikaisempaa tuntemusta μ-kalkyylistä tai monadisesta toisen kertaluvun predikaattilogiikasta. Vaikka tässä tutkielmassa määritellään lyhyesti niin transitiosysteemin kuin bisimulaationkin käsitteet, niin niiden käsittely on lähinnä kertaavaa, ei uutta opettavaa. Lukijan oletetaan tuntevan ainakin seuraavat käsiteet; transitiosysteemi, konjunktio, disjunktio, negaatio, modaalioperaattorit $\langle a \rangle$ ja $[a]$, kvanttorit $\forall$ ja $\exists$, yksi- ja kaksipaikkainen predikaattisymboli, relaatio, bisimulaatio, lause, automaatti. Tutkielmassa automaatteja on käytetty ainoastaan todistusteknisinä välineinä, joten automaattien sisäinen toiminta on jätetty tutkielman rajauksen ulkopuolelle. Siis lukijalta ei varsinaisesti vaadita automaattien teorian hallintaa. Automaattien sisäiseen toimintaan liittyvät todistukset on tässä tutkielmassa sivuutettu. Kiinnostunut lukija voi perehtyä tässä tutkielmassa esiintyvien automaattien sisäiseen toimintaan esimerkiksi artikkelien [1], [4] ja [9] avulla.

Tutkielmassa on käytetty pääasiallisena lähteenä Walukiewiczin ja Janinin artikkelia [5] ja Rohden tämän perusteella tekemää artikkelia [6]. Veneman luentorunkoja [7] ja [8] on käytetty lähteenä μ-kalkyylin peliteoreettisessa osassa.

2 Alustavia tuloksia

Tässä luvussa kerrataan nopeasti transitiosysteemin, transitiopuun ja bisimulaation määritelmät. Lisäksi kappaleessa määritellään tutkielman kannalta tärkeä transitiosysteemin ω-laajennus sekä todistetaan joitakin olennaisia ω-laajennuksen ominaisuuksia.

2.1 Transitiosysteemit ja transitiopuut

Määritelmä 2.1. Merkitään symbolilla $\mathbb{X}$ ääretöntä joukkoa joukkomuuttujia ja merkitään sen alkioita symboleilla $X, Y, Z \ldots$.

Määritelmä 2.2. Merkitään symbolilla $\mathbb{P}$ ääretöntä joukkoa yksipaikkaisia predikaattisymboleita ja merkitään sen alkioita symboleilla $p, p', p'' \ldots$.

Määritelmä 2.3. Merkitään symbolilla $\mathbb{R}$ ääretöntä joukkoa kaksipaikkaisia predikaattisymboleja ja merkitään sen alkioita symboleilla $r, r', r'' \ldots$.

Määritelmä 2.4. Struktuuria $\mathfrak{M} = (S^{\mathfrak{M}}, sr^{\mathfrak{M}}, \{r^{\mathfrak{M}} \mid r \in \mathbb{R}\}, \{p^{\mathfrak{M}} \mid p \in \mathbb{P}\})$, missä $S^{\mathfrak{M}}$ on epätyhjä joukko, $sr^{\mathfrak{M}}$ joukon $S^{\mathfrak{M}}$ eräs alkio, ja $\mathbb{P}$ ja $\mathbb{R}$ kuten edellä, kutsutaan *transitiosysteemiksi, jolla on juuri*, tai lyhyemmin *transitiosysteemiksi.*

Huomautus 2.1. Merkinnällä $r^{\mathfrak{M}}$ tarkoitetaan relaatiosymbolin r tulkintaa transitiosysteemissä $\mathfrak{M}$. Jatkossa, vaikkei struktuureja tai symboleja muuten mainittaisi tai määriteltäisi, merkinnällä $symb^{\mathfrak{M}}$ tarkoitetaan symbolin $symb$ tulkintaa transitiosysteemissä $\mathfrak{M}$.

Määritelmä 2.5. Olkoon $\mathfrak{M}$ mielivaltainen transitiosysteemi, $r \in \mathbb{R}$ jokin relaatiosymboli ja $s \in S^{\mathfrak{M}}$ jokin piste. Merkinnällä $scc_r^{\mathfrak{M}}(s)$ tarkoitetaan pisteen s kaikkien *r-seuraajien joukkoa* transitiosysteemissä $\mathfrak{M}$. Siis

$$scc_r^{\mathfrak{M}}(s) := \{t \in S^{\mathfrak{M}} \mid (s, t) \in r^{\mathfrak{M}}\}.$$

Määritelmä 2.6. Transitiosysteemiä $\mathfrak{M}$ kutsutaan *transitiopuuksi*, jos transitiosysteemin $\mathfrak{M}$ jokaisesta pisteestä $s \in S^{\mathfrak{M}}$ on yksikäsitteinen polku juureen $sr^{\mathfrak{M}}$. Toisin sanoen jokaista pistettä $s \in S^{\mathfrak{M}}$ kohden on olemassa täsmälleen yksi jono $s_0, s_1, \ldots, s_n$, missä $s_i \in S^{\mathfrak{M}}$, $s_0 = sr^{\mathfrak{M}}$, $s_n = s$ ja $s_{i+i} \in scc_{r_i}^{\mathfrak{M}}(s_i)$ täsmälleen yhdellä $r_i \in \mathbb{R}$, kun $0 \leq i < n$.

Määritelmä 2.7. Olkoon ϕ jokin kaava. Kaavaa ϕ sanotaan *lauseeksi*, jos siinä ei esiinny vapaita muuttujia.

Määritelmä 2.8. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi. Funktiota $V : \mathbb{X} \to \wp(S^{\mathfrak{M}})$ kutsutaan *valuaatiofunktioksi* tai lyhyemmin *valuaatioksi.* Jos V on malliin $\mathfrak{M}$ liittyvä valuaatio ja $X \in \mathbb{X}$, niin joukkoa $V(X)$ kutsutaan *muuttujan X tulkinnaksi* transitiosysteemissä $\mathfrak{M}$ valuaatiolla V.

Määritelmä 2.9. Olkoon V valuaatio. Merkinnällä $V[X := T]$ tarkoitetaan valuaatiota, jolla pätee, että $V[X := T](X) = T$ ja $V[X := T](Y) = V(Y)$, kun $Y \neq X$.

Määritelmä 2.10. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi, $s \in S^{\mathfrak{M}}$ jokin piste ja V jokin valuaatio. Sanotaan, että *transitiosysteemi* $\mathfrak{M}$ *toteuttaa kaavan* ϕ *valuaatiolla* V ja merkitään

$$(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \phi,$$

jos $s \in \|\phi\|_V^{\mathfrak{M}}$, eli jos piste s kuuluu kaavan ϕ totuusjoukkoon mallissa $\mathfrak{M}$ valuaatiolla V.

Määritelmä 2.11. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja $s \in S^{\mathfrak{M}}$ jokin piste. Sanotaan, että *transitiosysteemi* $\mathfrak{M}$ *toteuttaa kaavan* ϕ ja merkitään

$$(\mathfrak{M}, s) \vDash \phi,$$

jos $(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \phi$ kaikilla valuaatiolla V.

Lause 2.1. *Olkoon* ϕ *jokin lause, tällöin*

$$(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s) \vDash \phi.$$

Todistus. Koska ϕ on lause, niin siinä ei esiinny vapaita muuttujia, joten valuaatio V ei vaikuta lauseen ϕ toteutuvuuteen, josta väite seuraa. □

Määritelmä 2.12. Olkoon $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ transitiosysteemejä. Epätyhjää kaksipaikkaista relaatiota $R \subseteq S^{\mathfrak{M}} \times S^{\mathfrak{M}'}$ kutsutaan *bisimulaatioksi transitiosysteemien* $\mathfrak{M}$ *ja* $\mathfrak{M}'$ *välillä* ja merkitään $R : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. $(sr^{\mathfrak{M}}, sr^{\mathfrak{M}'}) \in R$.
2. Jos $(s, s') \in R$, niin kaikilla $p \in \mathbb{P}$ pätee, että $(\mathfrak{M}, s) \vDash p \Leftrightarrow (\mathfrak{M}', s') \vDash p$.
3. Jos $(s, s') \in R$ ja $(s, t) \in r^{\mathfrak{M}}$, missä $r \in \mathbb{R}$, niin silloin on olemassa sellainen $t' \in S^{\mathfrak{M}'}$, että $(t, t') \in R$ ja $(s', t') \in r^{\mathfrak{M}'}$.
4. Jos $(s, s') \in R$ ja $(s', t') \in r^{\mathfrak{M}'}$, missä $r \in \mathbb{R}$, niin on olemassa sellainen $t \in S^{\mathfrak{M}}$, että $(t, t') \in R$ ja $(s, t) \in r^{\mathfrak{M}}$.

Määritelmä 2.13. Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ transitiosysteemejä.

1. Jos transitiosysteemien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ välille voidaan muodostaa bisimulaatiorelaatio, kutsutaan niitä *bisimilaarisiksi.*
2. Jos transitiosysteemit $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ ovat bisimilaarisia relaation R suhteen eli $R : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$, kutsutaan niitä *$R$-bisimilaarisiksi.*

3. Bisimulaatiota R transitiosysteemien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ välillä sanotaan *kattavaksi*, jos

$$\forall s \in S^{\mathfrak{M}} : \exists s' \in S^{\mathfrak{M}'} : (s, s') \in R \text{ ja}$$
$$\forall s' \in S^{\mathfrak{M}'} : \exists s \in S^{\mathfrak{M}} : (s, s') \in R.$$

Määritelmä 2.14. Transitiosysteemien luokkaa C sanotaan *bisimulaation suhteen suljetuksi*, jos kyseinen luokka sisältää kaikki transitiosysteemit, jotka ovat bisimilaarisia jonkin luokan C transitiosysteemin kanssa. Eli

$$(\mathfrak{M} \in C \text{ ja } \mathfrak{M} \leftrightarrows \mathfrak{M}') \Rightarrow \mathfrak{M}' \in C.$$

2.2 Transitiosysteemin ω-laajennus

Määritelmä 2.15. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja $s \in S^{\mathfrak{M}}$ sen eräs piste. Jonoa

$$s_0(a_1, r_1, s_1)(a_2, r_2, s_2) \dots (a_n, r_n, s_n),$$

missä $s_0 = sr^{\mathfrak{M}}$, $s_n = s$, $a_i \in \mathbb{N}$ ja $s_{i+1} \in scc^{\mathfrak{M}}_{r_{i+1}}(s_i)$, kun $0 \leq i \leq n$, kutsutaan pisteen s ω-poluksi.

Huomautus 2.2. Jokaista juuresta $sr^{\mathfrak{M}}$ eroavaa pistettä s vastaa ainakin numeroituvasti ääretön määrä ω-polkuja, jotka eroavat toisistaan ainoastaan termien a_i suhteen.

Määritelmä 2.16. Transitiosysteemin $\mathfrak{M} = (S^{\mathfrak{M}}, sr^{\mathfrak{M}}, \{r^{\mathfrak{M}} \mid r \in \mathbb{R}\}, \{p^{\mathfrak{M}} \mid p \in \mathbb{P}\})$ *ω-laajennus* $\widehat{\mathfrak{M}} = (S^{\widehat{\mathfrak{M}}}, sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}, \{r^{\widehat{\mathfrak{M}}} \mid r \in \mathbb{R}\}, \{p^{\widehat{\mathfrak{M}}} \mid p \in \mathbb{P}\})$ määritellään seuraavasti.

- $S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$ on joukon $S^{\mathfrak{M}}$ kaikkien alkioiden kaikkien ω-polkujen joukko.
- $sr^{\widehat{\mathfrak{M}}} = sr^{\mathfrak{M}}$.
- $(u, v) \in r^{\widehat{\mathfrak{M}}}$, joss $v = u(a, r, s)$, missä $a \in \mathbb{N}$ ja $u \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$.
- Jokaiselle pisteen s ω-polulle $\widehat{s}$ pätee, että $(\mathfrak{M}, s) \vDash p \Leftrightarrow (\widehat{\mathfrak{M}}, \widehat{s}) \vDash p$, missä $p \in \mathbb{P}$ ja $s \in S^{\mathfrak{M}}$.

Huomautus 2.3. Olkoon $\widehat{\mathfrak{M}}$ jokin ω-laajennus. Jos $v = u(a, r, s) \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$, jollain $a \in \mathbb{N}$, niin $w_i = u(a_i, r, s) \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$ kaikilla $a_i \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 2.1. Olkoon $\mathfrak{M} = (S^{\mathfrak{M}}, sr^{\mathfrak{M}}, r^{\mathfrak{M}}, p^{\mathfrak{M}})$ transitiosysteemi, jossa $S^{\mathfrak{M}} = \{1, 2, 3\}$, $sr^{\mathfrak{M}} = 1$, $r^{\mathfrak{M}} = \{(1, 2), (2, 3)\}$ ja $p^{\mathfrak{M}} = \{1, 3\}$.

Transitiosysteemin $\mathfrak{M}$ ω-laajennus $\widehat{\mathfrak{M}} = (S^{\widehat{\mathfrak{M}}}, sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}, r^{\widehat{\mathfrak{M}}}, p^{\widehat{\mathfrak{M}}})$, missä

- $S^{\widehat{\mathfrak{M}}} = \{1, 1(a_1, r, 2), 1(a_1, r, 2)(a_2, r, 3) \mid a_1 \in \mathbb{N}, a_2 \in \mathbb{N}\}$,

- $sr^{\widehat{\mathfrak{M}}} = 1$,
- $r^{\widehat{\mathfrak{M}}} = \{(1, 1(a_1, r, 2)), (1(a_1, r, 2), 1(a_1, r, 2)(a_2, r, 3)) \mid a_1 \in \mathbb{N}, a_2 \in \mathbb{N}\}$,
- $p^{\widehat{\mathfrak{M}}} = \{1, 1(a_1, r, 2)(a_2, r, 3) \mid a_1 \in \mathbb{N}, a_2 \in \mathbb{N}\}$.

Lause 2.2. (Vrt. [6, s. 241].) *Transitiosysteemin* $\mathfrak{M}$ *ω-laajennus* $\widehat{\mathfrak{M}}$ *on transitiopuu.*

Todistus. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja $\widehat{\mathfrak{M}}$ sen ω-laajennus. Tehdään vastaoletus, että $\widehat{\mathfrak{M}}$ ei ole transitiopuu. Siis on olemassa sellainen piste $\widehat{s} \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$, josta ei ole polkua juureen tai sillä on ainakin kaksi eri polkua juureen.

Määritelmästä 2.16 seuraa, että $sr^{\mathfrak{M}} = sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}$. Valitaan mielivaltainen ω-polku $\widehat{s} \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$. Määritelmän 2.15 perusteella

$$\widehat{s} = s_0(a_1, r_1, s_1)(a_2, r_2, s_2) \dots (a_n, r_n, s_n),$$

missä $s_0 = sr^{\mathfrak{M}}$, $a_i \in \mathbb{N}$ ja $s_{i+1} \in scc^{\mathfrak{M}}_{r_{i+1}}(s_i)$, kun $0 \leq i \leq n$. Koska $S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$ on joukon $S^{\mathfrak{M}}$ kaikkien ω-polkujen joukko, niin on helppo nähdä, että jos

$$\widehat{s}_n = s_0(a_1, r_1, s_1)(a_2, r_2, s_2) \dots (a_n, r_n, s_n) \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}},$$

niin

$$\widehat{s}_i = s_0(a_1, r_1, s_1)(a_2, r_2, s_2) \dots (a_i, r_i, s_i) \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}},$$

kun $0 \leq i \leq n$. Nähdään helposti, että $\widehat{s}_{i+1} = \widehat{s}_i(a_{i+1}, r_{i+1}, s_{i+1})$, kun $0 \leq i \leq n$. Määritelmästä 2.16 seuraa, että $(\widehat{s}_i, \widehat{s}_{i+1}) \in r^{\widehat{\mathfrak{M}}}_{i+1}$, kun $0 \leq i \leq n$, jonka perusteella voidaan helposti todistaa induktiolla ω-polun pituuden suhteen, että pisteestä $\widehat{s}$ on polku juureen transitiosysteemissä $\widehat{\mathfrak{M}}$. Itseasiassa ehdosta $\widehat{s}_{i+1} = \widehat{s}_i(a_{i+1}, r_{i+1}, s_{i+1})$ seuraa, että pisteellä $\widehat{s}_{i+1}$ on ainoastaa yksi suora edeltäjä, nimittäin r_{i+1}-edeltäjä $\widehat{s}_i$. Koska jokaisella juuresta eroavalla pisteellä on ainoastaan yksi suora edeltäjä, niin ei ole olemassa sellaista pistettä, josta olisi kaksi eri polkua juureen. Erityisesti juuresta $sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}$ on täsmälleen yksi polku juureen, nimittäin tyhjä polku.

Siis transitiosysteemin $\mathfrak{M}$ ω-laajennus $\widehat{\mathfrak{M}}$ on transitiopuu. □

Esimerkki 2.2. Olkoon $\mathfrak{M} = (S^{\mathfrak{M}}, sr^{\mathfrak{M}}, r^{\mathfrak{M}}, p^{\mathfrak{M}})$ transitiosysteemi, jossa $S^{\mathfrak{M}} = \{1, 2, 3, 4\}$, $sr^{\mathfrak{M}} = 1$, $r^{\mathfrak{M}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ ja $p^{\mathfrak{M}} = \{1, 3, 4\}$.

Transitiosysteemin $\mathfrak{M}$ ω-laajennus $\widehat{\mathfrak{M}} = (S^{\widehat{\mathfrak{M}}}, sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}, r^{\widehat{\mathfrak{M}}}, p^{\widehat{\mathfrak{M}}})$, missä

- $S^{\widehat{\mathfrak{M}}} = \{1, 1(a_1, r, 2), 1(a_1, r, 3), 1(a_1, r, 2)(a_2, r, 3) \mid a_1 \in \mathbb{N}, a_2 \in \mathbb{N}\}$,
- $sr^{\widehat{\mathfrak{M}}} = 1$,
- $r^{\widehat{\mathfrak{M}}} = \{(1, 1(a_1, r, 2)), (1, 1(a_1, r, 3)), (1(a_1, r, 2), 1(a_1, r, 2)(a_2, r, 3)) \mid a_1 \in \mathbb{N}, a_2 \in \mathbb{N}\}$,

- $p^{\widehat{\mathfrak{M}}} = \{1, 1(a_1, r, 3), 1(a_1, r, 2)(a_2, r, 3) \mid a_1 \in \mathbb{N}, a_2 \in \mathbb{N}\}$.

Huomionarvoista on se, että $\mathfrak{M}$ ei ole transitiopuu, mutta $\widehat{\mathfrak{M}}$ on.

Lause 2.3. (Vrt. [6, s. 241]) *Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi. Nyt $\mathfrak{M} \leftrightarrows \widehat{\mathfrak{M}}$.*

Todistus. Olkoon $R \subseteq S^{\mathfrak{M}} \times S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$ sellainen relaatio, että $(s, t) \in R$, joss t on pisteen s ω-polku. Todistetaan, että R on bisimulaatio transitiosysteemien $\mathfrak{M}$ ja $\widehat{\mathfrak{M}}$ välillä käymällä läpi määritelmän 2.12 ehdot.

1. $sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}$ on pisteen $sr^{\mathfrak{M}}$ ω-polku, joten $(sr^{\mathfrak{M}}, sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}) \in R$.

2. Valitaan mielivaltainen $(s, s') \in R$. Koska s' on pisteen s ω-polku, niin määritelmästä 2.16 seuraa, että s ja s' toteuttavat samat propositiosymbolit.

3. Oletetaan, että $(s, s') \in R$ ja $(s, t) \in r^{\mathfrak{M}}$, missä $r \in \mathbb{R}$. Valitaan jokin $a \in \mathbb{N}$. Nyt pisteen t eräs ω-polku on $t' = s'(a, r, t) \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$, joten $(s', t') \in r^{\widehat{\mathfrak{M}}}$ ja $(t, t') \in R$.

4. Oletetaan, että $(s, s') \in R$ ja $(s', t') \in r^{\widehat{\mathfrak{M}}}$, missä $r \in \mathbb{R}$. Nyt määritelmästä 2.16 seuraa, että $t' = s'(a, r, t)$, jollain $t \in S^{\mathfrak{M}}$ ja $a \in \mathbb{N}$. Itseasiassa t' on pisteen t ω-polku, joten $(t, t') \in R$. Koska $s' = u(a_i, r_i, s)$ (tai erikoistapauksessa $s' = sr^{\widehat{\mathfrak{M}}} = sr^{\mathfrak{M}} = s$), niin $t' = u(a_i, r_i, s)(a, r, t)$ (tai $t' = s(a, r, t)$), jollain $a_i \in \mathbb{N}$, $r_i \in \mathbb{R}$ ja $u \in S^{\widehat{\mathfrak{M}}}$. Koska t' on ω-polku niin määritelmästä 2.15 seuraa, että $(s, t) \in r^{\mathfrak{M}}$.

Kaikki bisimulaation määritelmän ehdot pätevät, joten $\mathfrak{M}$ ja $\widehat{\mathfrak{M}}$ ovat bisimilaarisia. $\square$

3 μ-kalkyyli ja MSO

Tässä luvussa määritellään μ-kalkyyli, monadinen toisen kertaluvun predikaattilogiikka ja esitetään standardikäännös μ-kalkyylistä monadiseen toisen kertaluvun predikaattilogiikkaan.

Luvun ensimmäisessä osassa käsitellään μ-kalkyyliä. Aluksi määritellään funktion kiintopiste ja todistetaan Knaster-Tarski -lause, joka kertoo, että jokaisella muotoa $f : \wp(S) \to \wp(S)$ olevalla monotonisella funktiolla f on suurin ja pienin kiintopiste. Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan μ-kalkyylin standardisemantiikkaa, jonka jälkeen esitellään μ-kalkyylin peliteoreettinen semantiikka, jonka tarkoitus on havainnollistaa μ-kaavojen merkitystä. Lopuksi todistetaan joitakin μ-kalkyyliin liittyviä perustavanlaatuisia tuloksia.

Luvun toisessa osassa määritellään monadinen toisen kertaluvun predikaattilogiikka ja todistetaan joitakin tuloksia.

Luvun viimeisessä osassa esitetään standardikäännös μ-kalkyylistä monadiseen toisen kertaluvun predikaattilogiikkaan ja todistetaan käännöksen μ-askel.

3.1 μ-kalkyyli

3.1.1 Kiintopisteet

Tässä kappaleessa lähteinä on käytetty teoksia [1] ja [2].

Olkoon $\mathfrak{M}$ jokin transitiosysteemi, $\phi(X)$ jokin kaava, jossa joukkomuuttuja X esiintyy vapaana ja V jokin valuaatio. Yksi tapa kuvata muuttujan X tulkinnan suhdetta kaavan $\phi(X)$ totuusjoukkoon on ajatella kaavaa $\phi(X)$ funktiona $f^V_{\phi(X)}$, joka saa parametrikseen muuttujan X tulkinnan ja palauttaan kaavan $\phi(X)$ totuusjoukon. Tällöin funktio $f^V_{\phi(X)}$ on muotoa $f^V_{\phi(X)} : \wp(S^{\mathfrak{M}}) \to \wp(S^{\mathfrak{M}})$ ja $f^V_{\phi(X)}(Y) = \|\phi(X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[X:=Y]}$. Kutsutaan tälläistä funktiota $f^V_{\phi(X)}$ kaavan $\phi(X)$ merkitysfunktioksi. Jos muuttuja X ja valuaatio V, johon funktiota $f^V_{\phi(X)}$ sovelletaan, on asiayhteydestä selvä, käytetään yksinkertaisesti merkintää f_ϕ.

Määritelmä 3.1. Olkoon S jokin joukko ja $f : \wp(S) \to \wp(S)$ jokin funktio.

1. Funktio f on monotoninen, mikäli kaikille $X, Y \in \wp(S)$ pätee, että jos $X \subseteq Y$ niin $f(X) \subseteq f(Y)$.

2. Joukkoa X sanotaan funktion f kiintopisteeksi, jos $f(X) = X$.

3. Joukkoa X sanotaan funktion f pienimmäksi kiintopisteeksi, jos X on funktion f kiintopiste ja kaikille funktion f kiintopisteille Y pätee, että $X \subseteq Y$.

4. Joukkoa X sanotaan funktion f suurimmaksi kiintopisteeksi, jos X on funktion f kiintopiste ja kaikille funktion f kiintopisteille Y pätee, että $Y \subseteq X$.

Lause 3.1 (Knaster-Tarski -lause)**.** (Vrt. [3, s. 260].) *Olkoon* $f : \wp(S) \to \wp(S)$ *monotoninen funktio. Tällöin funktiolla* f *on pienin kiintopiste* $LFP(f)$ *ja suurin kiintopiste* $GFP(f)$ *siten, että*

1. $LFP(f) = \bigcap\{X \subseteq S \mid f(X) \subseteq X\}$ *ja*

2. $GFP(f) = \bigcup\{X \subseteq S \mid X \subseteq f(X)\}$.

Todistus. Selvästi $\{X \subseteq S \mid f(X) \subseteq X\}$ sisältää aina joukon S ja $\{X \subseteq S \mid X \subseteq f(X)\}$ sisältää aina tyhjän joukon, joten edellä mainitut joukot ovat aina epätyhjiä. Todistetaan, että $LFP(f)$ on funktion f pienin kiintopiste ja, että $GFP(f)$ on funktion f suurin kiintopiste.

1. Olkoon $\chi = \{X \subseteq S \mid f(X) \subseteq X\}$ ja $Z = \bigcap \chi$. Näytetään ensin, että Z on funktion f kiintopiste eli, että $f(Z) = Z$.

   Valitaan mielivaltainen $X \in \chi$. Selvästi $Z \subseteq X$. Funktion f monotonisuudesta seuraa, että $f(Z) \subseteq f(X)$. Koska $X \in \chi$, niin $f(X) \subseteq X$. Siis $f(Z) \subseteq X$. Koska X valittiin mielivaltaisesti, niin $f(Z) \subseteq X$ kaikilla $X \in \chi$. Koska $Z = \bigcap \chi$, niin $f(Z) \subseteq Z$.

   Todistetaan vielä, että $Z \subseteq f(Z)$. Edellisen perusteella $f(Z) \subseteq Z$, joten funtion f monotonisuuden perusteella $f(f(Z)) \subseteq f(Z)$. Nähdään heti, että $f(Z) \in \chi$, joten $Z \subseteq f(Z)$. Näin tullaan todistaneeksi, että $f(Z) = Z$.

   Todistetaan vielä, että Z on pienin kiintopiste. Olkoon Y jokin funktion f kiintopiste. Tällöin $f(Y) = Y$ ja erityisesti $f(Y) \subseteq Y$, joten $Y \in \chi$. Tästä seuraa, että $Z \subseteq Y$, joten Z on pienin kiintopiste. Siis $LFP(f) = \bigcap\{X \subseteq S \mid f(X) \subseteq X\}$.

2. Olkoon $\chi = \{X \subseteq S \mid X \subseteq f(X)\}$ ja $Z = \bigcup \chi$. Näytetään ensin, että Z on funktion f kiintopiste eli, että $f(Z) = Z$.

   Valitaan mielivaltainen $X \in \chi$. Selvästi $X \subseteq Z$. Funktion f monotonisuudesta seuraa, että $f(X) \subseteq f(Z)$. Koska $X \in \chi$, niin $X \subseteq f(X)$. Siis $X \subseteq f(Z)$. Koska X valittiin mielivaltaisesti, niin $X \subseteq f(Z)$ kaikilla $X \in \chi$. Koska $Z = \bigcup \chi$, niin $Z \subseteq f(Z)$.

   Todistetaan vielä, että $f(Z) \subseteq Z$. Edellisen perusteella $Z \subseteq f(Z)$, joten funktion f monotonisuuden perusteella $f(Z) \subseteq f(f(Z))$. Nähdään heti, että $f(Z) \in \chi$, joten $f(Z) \subseteq Z$. Näin tullaan todistaneeksi, että $f(Z) = Z$.

   Todistetaan vielä, että Z on suurin kiintopiste. Olkoon Y jokin funktion f kiintopiste. Tällöin $f(Y) = Y$ ja erityisesti $Y \subseteq f(Y)$, joten $Y \in \chi$.

Tästä seuraa, että $Y \subseteq Z$, joten Z on funktion f suurin kiintopiste. Siis $GFP(f) = \bigcup\{X \subseteq S \mid X \subseteq f(X)\}$.

$\square$

Korollaari 3.1. *Olkoon $f : \wp(S) \to \wp(S)$ monotoninen funktio. Tällöin funktion f pienimmälle kiintopisteelle $LFP(f)$ ja suurimmalle kiintopisteelle $GFP(f)$ pätee, että*

1. $LFP(f) = \bigcap\{X \subseteq S \mid f(X) = X\}$ *ja*

2. $GFP(f) = \bigcup\{X \subseteq S \mid X = f(X)\}$.

Siis lauseessa 3.1 esiintyvät ehdot $f(X) \subseteq X$ ja $X \subseteq f(X)$ voidaan korvata merkinnällä $f(X) = X$.

Todistus. Lauseen 3.1 perusteella, kun f on monotoninen, niin $LFP(f)$ ja $GFP(f)$ ovat aina olemassa ja ne ovat kiintopisteitä siten, että jokaisella funktion f kiintopisteella X $LFP(f) \subseteq X$ ja $X \subseteq GFP(f)$. Siis $LFP(f) = \bigcap\{X \subseteq S \mid f(X) = X\}$ ja $GFP(f) = \bigcup\{X \subseteq S \mid X = f(X)\}$. $\square$

3.1.2 μ-kalkyylin standardisemantiikka

Määritelmä 3.2. Merkitään symbolilla $\mathbb{L}$ ääretöntä joukkoa modaliteettien nimiä ja merkitään sen alkiota symboleilla $a, b, \ldots$.

Määritelmä 3.3. Olkoon $\phi(X)$ kaava, jossa konnektiiveina käytetään vain konjunktiota ja negaatiota. Erityisesti jokainen implikaationuoli ja ekvivalenssinuoli on purettu määritelmiensä mukaan konjunktioiden ja negaatioiden avulla. Muuttujan X esiintymää kaavassa $\phi(X)$ sanotaan positiivikseksi, mikäli siihen vaikuttaa parillinen määrä negaatioita. Jos muuttujan esiintymään vaikuttaa pariton määrä negaatioita, sanotaan esiintymää negatiiviseksi.

Esimerkki 3.1. Kaavassa $\neg(Y \wedge \neg\langle a\rangle(\neg Z \wedge Z)) \wedge \mu X.(X \wedge p)$ muuttuja X esiintyy positiivisesti, Y negatiivisesti ja Z esiintyy sekä positiivisesti että negatiivisesti.

Määritelmä 3.4. μ *kalkyylin kieli* $L\mu(\mathbb{X}, \mathbb{P}, \mathbb{L})$ muodostuu joukkomuuttujista $X \in \mathbb{X}$, yksipaikkaisista propositiosymboleista $p \in \mathbb{P}$ ja modaliteettien nimistä $a \in \mathbb{L}$. Kielen $L\mu(\mathbb{X}, \mathbb{P}, \mathbb{L})$ kaavat muodostuvat seuraavasti.

- Jokainen joukkomuuttuja $X \in \mathbb{X}$ on kaava.
- Jokainen propositiosymboli $p \in \mathbb{P}$ on kaava.
- $\perp$ on kaava.
- $\top$ on kaava.

- Jos ϕ on kaava, niin $\neg\phi$ on kaava.
- Jos ϕ_1 ja ϕ_2 ovat kaavoja, niin $\phi_1 \wedge \phi_2$ on kaava.
- Jos ϕ on kaava ja $a \in \mathbb{L}$, niin $\langle a \rangle \phi$ on kaava.
- Jos $\phi(X)$ on kaava, jossa X esiintyy vain positiivisesti, niin $\mu X.\phi(X)$ on kaava.

Muut konnektiivit määritellään konjunktion, negaation ja mahdollisuusoperaattorien $\langle a \rangle$ avulla tavanomaisesti. Pienimmän kiintopisteoperaattorin μX duaali $\nu X.\phi(X) := \neg \mu X.\neg\phi(\neg X)$.

Huomautus 3.1. Vastaavasti pienin kiintopisteoperaattori μX voidaan määritellä suurimman kiintopisteoperaattorin νX duaalina. Tällöin

$$\mu X.\phi(X) := \neg \nu X.\neg\phi(\neg X).$$

Esimerkki 3.2. Oletetaan että $a \in \mathbb{L}$, $p, q \in \mathbb{P}$ ja $X, Y \in \mathbb{X}$. Nyt X, $\langle a \rangle(p \wedge q)$ ja $\neg Y \wedge \mu X.(X \wedge \neg\langle a \rangle \neg X)$ ovat kaavoja, mutta $\mu X.(X \wedge \langle a \rangle \neg X)$ ei ole kaava.

Määritelmä 3.5. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja V valuaatio. Määritellään kaavan ϕ totuusjoukko $\|\phi\|_V^{\mathfrak{M}}$ induktiivisesti seuraavasti.

- $\|X\|_V^{\mathfrak{M}} := V(X)$, kun $X \in \mathbb{X}$,
- $\|p\|_V^{\mathfrak{M}} := p^{\mathfrak{M}}$, kun $p \in \mathbb{P}$,
- $\|\bot\|_V^{\mathfrak{M}} := \emptyset$,
- $\|\top\|_V^{\mathfrak{M}} := S^{\mathfrak{M}}$,
- $\|\neg\phi\|_V^{\mathfrak{M}} := S^{\mathfrak{M}} - \|\phi\|_V^{\mathfrak{M}}$,
- $\|\phi_1 \wedge \phi_2\|_V^{\mathfrak{M}} := \|\phi_1\|_V^{\mathfrak{M}} \cap \|\phi_1\|_V^{\mathfrak{M}}$,
- $\|\langle a \rangle \phi\|_V^{\mathfrak{M}} := \{s \in S^{\mathfrak{M}} \mid scc_a^{\mathfrak{M}}(s) \cap \|\phi\|_V^{\mathfrak{M}} \neq \emptyset\}$, kun $a \in \mathbb{L}$,
- $\|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}} := \bigcap\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\phi(X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}} \subseteq T\}$.

Huomautus 3.2. Jos μ-kalkyyli on määritelty siten, että μX on määritelty suurimman kiintopisteoperaattorin νX duaalina, niin

$$\|\nu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}} := \bigcup\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid T \subseteq \|\phi(X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}}\}$$

Huomautus 3.3. Itseasiassa $\|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$ on kaavan $\phi(X)$ merkitysfunktion pienin kiintopiste ja vastaavasti $\|\nu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$ on kaavan $\phi(X)$ merkitysfunktion suurin kiintopiste (ks. lause 3.6).

Todistetaan, että määritelmässä 3.5 esitellyn pienimmän kiintopisteoperaattorin μX duaali νX on huomautuksessa 3.2 esitelty suurin kiintopisteoperaattori. Todistetaan myös, että suurimman kiintopisteoperaattorin duaali on pienin kiintopisteoperaattori.

Määritelmä 3.6. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja A jokin joukko. Käytetään seuraavaa lyhennysmerkintää

$$\sim A := S^{\mathfrak{M}} - A.$$

Lause 3.2. *Pienimmän kiintopisteoperaattorin duaali on suurin kiintopisteoperaattori ja suurimman kiintopisteoperaattorin duaali on pienin kiintopisteoperaattori.*

Todistus. Olkoon $\mathfrak{M}$ mielivaltainen transitiosysteemi, V mielivaltainen valuaatio ja $\phi(X)$ mielivaltainen $L\mu$-kaava, jossa X esiintyy vain positiivisesti. Todistetaan ensin, että suurimman kiintopisteoperaattorin duaali on pienin kiintopisteoperaattori.

$$\begin{aligned}
&\|\neg\nu X.\neg\phi(\neg X)\|_V^{\mathfrak{M}} \\
&\quad =\sim \|\nu X.\neg\phi(\neg X)\|_V^{\mathfrak{M}} \\
&\quad =\sim \bigcup\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid T \subseteq \|\neg\phi(\neg X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}}\} \\
&\quad =\sim \bigcup\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \sim \|\neg\phi(\neg X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}} \subseteq \sim T\} \\
&\quad =\sim \bigcup\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\phi(\neg X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}} \subseteq \sim T\} \\
&\quad =\sim \bigcup\{\sim K \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\phi(\neg X)\|_{V[X:=\neg K]}^{\mathfrak{M}} \subseteq K\} \\
&\quad =\sim \bigcup\{\sim K \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\phi(X)\|_{V[X:=K]}^{\mathfrak{M}} \subseteq K\} \\
&\quad = \bigcap\{K \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\phi(X)\|_{V[X:=K]}^{\mathfrak{M}} \subseteq K\} \\
&\quad = \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}.
\end{aligned}$$

Siis suurimman kiintopisteoperaattorin duaali on pienin kiintopisteoperaattori. Käytetään tätä tulosta apuna, kun todistetaan, että pienimmän kiintopisteoperaattorin duaali on suurin kiintopisteoperaattori.

$$\begin{aligned}
\|\neg\mu X.\neg\phi(\neg X)\|_V^{\mathfrak{M}} &=\sim \|\mu X.\neg\phi(\neg X)\|_V^{\mathfrak{M}} \\
&=\sim \|\neg\nu X.\neg\neg\phi(\neg\neg X)\|_V^{\mathfrak{M}} \\
&= \|\nu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}.
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 3.7. Merkinnällä ηX viitataan sekä kiintopisteoperaattoriin μX että νX.

Määritelmä 3.8. Muuttujan X esiintymää $L\mu$-kaavassa ϕ sanotaan sidotuksi, mikäli se on jonkin kiintopisteoperaattorin ηX vaikutuspiirissä. Jos muuttujan X esiintymä kaavassa ϕ ei ole sidottu, on se vapaa.

Huomautus 3.4. Sama muuttuja voi yhtä aikaa esiintyä kaavassa sekä vapaana että sidottuna.

Esimerkki 3.3. Kaavassa $Y \wedge \mu X.(p \vee \langle a \rangle X \vee Z)$ muuttujat Y ja Z esiintyvät vapaana, kun taas muuttuja X esiintyy sidottuna.

Määritelmä 3.9. $L\mu$ kaavaa ϕ sanotaan puhtaaksi, mikäli

1. jokaista kaavassa ϕ esiintyvää sidottua muuttujaa X sitoo täsmälleen yksi kiintopisteoperaattori ηX ja

2. mikään sidottu muuttuja X ei esiinny vapaana kaavassa ϕ.

Lause 3.3. (Vrt. [8, s. 3-11].) *Jokaista $L\mu$-kaavaa ϕ vastaa ekvivalentti puhdas $L\mu$-kaava ϕ^*.*

Todistus. Mielivaltaisesta $L\mu$-kaavasta ϕ saadaan ekvivalentti puhdas $L\mu$-kaava muuttujavaihdosten avulla. Mikäli jokin sidottu muuttuja esiintyy vapaana kaavassa ϕ, vaihdetaan sidotun muuttujan tilalle jokin sellainen muuttuja, joka ei jo esiinny kaavassa ϕ. Jos kaksi kiintopisteoperaattorien ilmentymää sitoo samaa muuttujaa, vaihdetaan jälkimmäisen muuttujan tilalle jokin kaavassa ϕ ennestään esiintymätön muuttuja. Näin muokattu $L\mu$-kaava on selvästi puhdas ja ekvivalentti alkuperäisen kaavan kanssa. □

Esimerkki 3.4. Olkoot $\phi = \mu X.(p \vee \langle a \rangle X) \wedge \mu X.(p \wedge \langle a \rangle X)$ ja $\vartheta = \mu X.(p \vee \langle a \rangle X) \wedge X$. Kaavat ϕ ja ϑ eivät ole puhtaita. Kaavaa ϕ vastaa puhdas ekvivalentti kaava $\phi^* = \mu X.(p \vee \langle a \rangle X) \wedge \mu Y.(p \wedge \langle a \rangle Y)$ ja kaavaa ϑ vastaa puhdas ekvivalentti kaava $\vartheta^* = \mu Y.(p \vee \langle a \rangle Y) \wedge X$.

Tästä lähtien puhuttaessa $L\mu$-kaavoista oletetaan ne automaattisesti puhtaiksi kaavoiksi.

Lause 3.4. *Jokaista $L\mu$-kaavaa ϕ vastaa ekvivalentti $L\mu$ kaava ϕ^*, jossa negaatioita esiintyy ainoastaan propositiosymboleiden ja vapaiden muuttujien edessä.*

Todistus. Olkoon ϕ mielivaltainen määritelmän 3.4 mukainen $L\mu$-kaava. Olkoon ϑ kaavan ϕ jokin alikaava.

- Jos $\vartheta = \neg\bot$ (tai $\vartheta = \neg\top$) niin yhtäpitävää on, että $\vartheta = \top$ (tai $\vartheta = \bot$). Korvataan alkuperäisen kaavan ϑ esiintymät kaavassa ϕ muokatulla kaavalla ϑ.

- Jos $\vartheta = \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ (tai $\vartheta = \neg(\psi_1 \vee \psi_2)$), joillain kaavoilla ψ_1 ja ψ_2, niin sovelletaan kaavaan ϑ vastaavaa de Morganin lakia, jonka jälkeen $\vartheta = \neg\psi_1 \vee \neg\psi_2$ (tai $\vartheta = \neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2$). Korvataan alkuperäisen kaavan ϑ esiintymät kaavassa ϕ muokatulla kaavalla ϑ.

- Jos $\vartheta = \neg\langle a\rangle\psi$ (tai $\vartheta = \neg[a]\psi$), jollain kaavalla ψ ja jollain $a \in \mathbb{L}$, niin sovelletaan kaavaan ϑ modaalioperaattorien duaalisääntöä, jonka jälkeen $\vartheta = [a]\neg\psi$ (tai $\vartheta = \langle a\rangle\neg\psi$). Korvataan alkuperäisen kaavan ϑ esiintymät kaavassa ϕ muokatulla kaavalla ϑ.

- Jos $\vartheta = \neg\mu X.\psi(X)$ (tai $\vartheta = \neg\nu X.\psi(X)$), jollain kaavalla $\psi(X)$, niin sovelletaan kaavaan ϑ kiintopisteoperaattorien duaalisääntöä, jonka jälkeen $\vartheta = \nu X.\neg\psi(\neg X)$ (tai $\vartheta = \mu X.\neg\psi(\neg X)$). Korvataan alkuperäisen kaavan ϑ esiintymät kaavassa ϕ muokatulla kaavalla ϑ.

- Poistetaan kaikki kaavassa ϕ esiintyvät tuplanegaatiot.

Soveltamalla sopivaa operaatiota edellä mainituista operaatioista jokaiseen negaatioon, joka ei esiinny propositiosymbolin tai joukkomuuttujan edessä, saadaan ϕ lopulta haluttuun muotoon ϕ^*. Selvästi edellä mainitut operaatiot säilyttävät kaavan ϕ merkityksen, joten ϕ ja ϕ^* ovat ekvivalentteja. Erityisesti minkään sidotun muuttujan edessä ei voi olla negaatiota, sillä kaavan $\eta X.\psi(X)$ alikaavassa $\psi(X)$ saa X esiintyä vain positiivisesti. $\square$

Esimerkki 3.5. Olkoon $\phi = \neg(p \wedge (\neg X \vee (\langle a\rangle q \wedge \mu X.(p \vee (\langle a\rangle X)))))$. Muodostetaan $L\mu$-kaavan ϕ kanssa ekvivalentti $L\mu$-kaava ϕ^* seuraavien askelten kautta.

$$\begin{aligned}
&\neg(p \wedge (\neg X \vee (\langle a\rangle q \wedge \mu X.(p \vee (\langle a\rangle X)))))\\
&\Leftrightarrow^1 \neg p \vee \neg(\neg X \vee (\langle a\rangle q \wedge \mu X.(p \vee (\langle a\rangle X))))\\
&\Leftrightarrow^1 \neg p \vee (\neg\neg X \wedge \neg(\langle a\rangle q \wedge \mu X.(p \vee (\langle a\rangle X))))\\
&\Leftrightarrow^{1,2} \neg p \vee (X \wedge (\neg\langle a\rangle q \vee \neg\mu X.(p \vee (\langle a\rangle X))))\\
&\Leftrightarrow^{3,4} \neg p \vee (X \wedge ([a]\neg q \vee \nu X.\neg(p \vee (\langle a\rangle\neg X))))\\
&\Leftrightarrow^1 \neg p \vee (X \wedge ([a]\neg q \vee \nu X.(\neg p \wedge \neg(\langle a\rangle\neg X))))\\
&\Leftrightarrow^3 \neg p \vee (X \wedge ([a]\neg q \vee \nu X.(\neg p \wedge [a]\neg\neg X)))\\
&\Leftrightarrow^2 \neg p \vee (X \wedge ([a]\neg q \vee \nu X.(\neg p \wedge [a]X)))
\end{aligned}$$

Ekvivalenssiketjussa on käytetty seuraavia sääntöjä: 1 de Morganin laki, 2 kaksoisnegaation eliminointi, 3 modaalioperaattorien duaalisääntö ja 4 kiintopisteoperaattorien duaalisääntö. Näin muodostettu kaava $\vartheta = \neg p \vee (X \wedge ([a]\neg q \vee \nu X.(\neg p \wedge [a]X)))$ on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa ja siinä esiintyy negaatioita ainostaan vapaiden muuttujien ja propositiosymboleiden edessä.

Lause 3.5. *Olkoon* $\mathfrak{M}$ *jokin transitiosysteemi,* V *jokin valuaatio,* $\phi(X)$ *sellainen* $L\mu$*-kaava, jossa* X *esiintyy vain positiivisesti ja* $f^V_{\phi(X)}$ *siihen liittyvä merkitysfunktio. Tällöin funktio* $f^V_{\phi(X)}$ *on monotoninen.*

Todistus. Selvästi

$$f^V_{\phi(X)}(A) \subseteq f^V_{\phi(X)}(B), \tag{3.1}$$

$$\|\phi(X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[X:=A]} \subseteq \|\phi(X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[X:=B]}, \tag{3.2}$$

$$(\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \phi(X) \Rightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \phi(X) \quad \text{kaikilla } s \in S^{\mathfrak{M}}, \tag{3.3}$$

ovat yhtäpitäviä. Oletetaan, että $\phi(X)$ on saatettu sellaiseen muotoon, että negaatioita esiintyy ainoastaan vapaiden muuttujien ja propositiosymbolei- den edessä. Todistetaan väite induktiolla kaavan $\phi(X)$ rakenteen suhteen.

Valitaan mielivaltaiset $A, B \in S^{\mathfrak{M}}$ siten, että $A \subseteq B$. Todistetaan, että tällöin $f^V_{\phi(X)}(A) \subseteq f^V_{\phi(X)}(B)$. Valitaan mielivaltainen $s \in S^{\mathfrak{M}}$.

1. Oletetaan, että $\phi(X) = p$ tai $\phi(X) = Y$, missä $p \in \mathbb{P}$, $Y \in \mathbb{X}$ ja $Y \neq X$. Nyt selvästi

$$(\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \phi(X) \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \phi(X),$$

   joten väite seuraa kaavasta 3.3.

2. Oletetaan, että $\phi(X) = X$. Väite seuraa suoraan joukkojen A ja B valinnasta.

3. Oletetaan, että $\phi(X) = \vartheta_1(X) \wedge \vartheta_2(X)$ ja tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavoille $\vartheta_1(X)$ ja $\vartheta_2(X)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \phi(X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \vartheta_1(X) \wedge \vartheta_2(X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \vartheta_1(X) \text{ ja } (\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \vartheta_2(X) \\
&\quad \Rightarrow^{IO} (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \vartheta_1(X) \text{ ja } (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \vartheta_2(X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \vartheta_1(X) \wedge \vartheta_2(X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \phi(X).
\end{aligned}$$

   josta väite seuraa kaavan 3.3 perusteella.

4. Oletetaan, että $\phi(X) = \vartheta_1(X) \vee \vartheta_2(X)$. Todistus on oleellisesti samanlainen kuin edellinen kohta.

5. Oletetaan, että $\phi(X) = \langle a \rangle \vartheta(X)$ ja tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalle $\vartheta(X)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \phi(X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \langle a \rangle \vartheta(X) \\
&\quad \Leftrightarrow \exists t \in S^{\mathfrak{M}} : t \in scc_a^{\mathfrak{M}}(s) \text{ ja } (\mathfrak{M}, t, V[X := A]) \vDash \vartheta(X) \\
&\quad \Rightarrow^{IO} \exists t \in S^{\mathfrak{M}} : t \in scc_a^{\mathfrak{M}}(s) \text{ ja } (\mathfrak{M}, t, V[X := B]) \vDash \vartheta(X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \langle a \rangle \vartheta(X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \phi(X),
\end{aligned}$$

josta väite seuraa kaavan 3.3 perusteella.

6. Oletetaan, että $\phi(X) = [a]\vartheta(X)$. Todistus on oleellisesti samanlainen kuin edellinen kohta.

7. Oletetaan, että $\phi(X) = \mu Y.\vartheta(Y, X)$. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalle $\vartheta(Y, X)$, missä X on merkitysfunktiossa $f^V_{\vartheta(Y,X)}(X)$ esiintyvä joukkomuuttuja. Tällöin

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \phi(X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := A]) \vDash \mu Y.\vartheta(Y, X) \\
&\quad \Leftrightarrow s \in \bigcap \{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\vartheta(Y, X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[Y:=T, X:=A]} \subseteq T\} \\
&\quad \Rightarrow^{IO} s \in \bigcap \{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\vartheta(Y, X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[Y:=T, X:=B]} \subseteq T\} \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \mu Y.\vartheta(Y, X) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V[X := B]) \vDash \phi(X),
\end{aligned}$$

josta väite seuraa kaavan 3.3 perusteella. Todistuksessa esiintyvä implikaatio seuraa induktio-oletuksen perusteella kaavasta 3.2, sillä sen perusteella $\|\vartheta(Y, X)\|^{\mathfrak{M}}_{V:[Y=T, X:=A]} \subseteq \|\vartheta(Y, X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[Y:=T, X:=B]}$ kaikilla $T \subseteq S^{\mathfrak{M}}$. Siis, jos $Z \in \{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\vartheta(Y, X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[Y:=T, X:=B]} \subseteq T\}$, niin $Z \in \{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\vartheta(Y, X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[Y:=T, X:=A]} \subseteq T\}$, josta implikaatio seuraa.

8. Oletetaan, että $\phi(X) = \nu Y.\vartheta(Y, X)$. Todistus on oleellisesti samanlainen kuin edellinen kohta.

Induktioperiaatteen nojalla väite pätee. □

Lause 3.6. *Kaavan $\mu X.\phi(X)$ tulkinta on kaavan $\phi(X)$ merkitysfunktion pienin kiintopiste $LFP(f_\phi)$. Vastaavasti kaavan $\nu X.\phi(X)$ tulkinta on kaavan $\phi(X)$ merkitysfunktion suurin kiintopiste $GFP(f_\phi)$.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan määritelmästä 3.5, Knaster-Tarski -lauseesta (lause 3.1) ja lauseesta 3.5. □

Määritelmä 3.10. Olkoon ϕ ja ϑ kaavoja. Merkitään $\phi \trianglelefteq \vartheta$, jos ϕ on kaavan ϑ alikaava.

Määritelmä 3.11. Olkoon ϕ jokin puhdas $L\mu$-kaava ja $\xi_X = \eta_X X.\phi_X$ ja $\xi_Y = \eta_Y Y.\phi_Y$ kaavan ϕ alikaavoja. Mikäli $\xi_X \trianglelefteq \xi_Y$ sanotaan, että kiintopisteoperaattori η_X on riippuvainen kiintopisteoperaattorista η_Y kaavassa ϕ ja merkitään $\eta_X \leq_\phi \eta_Y$.

3.1.3 Peliteoreettinen näkökulma μ-kalkyylin semantiikkaan

Edellä esitetty määritelmä μ-kalkyylistä ei ole kovin intuitiivinen. Kiintopisteen ja etenkin pienimmän ja suurimman kiintopisteen käsitteet eivät sinänsä ole vaikeita ymmärtää, mutta pelkästään määritelmän 3.5 perusteella on vaikea sanoa, mitä itseasiassa tarkoittaa, kun transitiosysteemin jossain pisteessä pätee jokin muotoa $\mu X.\phi(X)$ oleva kaava. Kun muotoa $\mu X.\phi(X)$ olevaa kaavaa tarkastellaan peliteoreettisesti, kaavan merkitys selviää paremmin. Peliteoria antaa μ-kalkyylille verrattain helposti ymmärrettävän rekursiivisen merkityksen. Tarkastellaan mielivaltaisen $L\mu$-kaavan toteutumista transitiosysteemissä μ-valuaatiopelin ε avulla. Tässä kappaleessa lähteenä on pääasiassa käytetty Yde Veneman luentorunkoja [7] ja [8].

Määritelmä 3.12. (Vrt. [8, s. 2-4]) Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi, $s \in S^{\mathfrak{M}}$, V jokin valuaatio ja ξ $L\mu$-kaava. Seuraavanlaista peliä kutsutaan μ-valuaatiopeliksi ja merkitään $\varepsilon(\xi, (\mathfrak{M}, s, V))$. Oletetaan lisäksi, että kaava ξ on saatettu sellaiseen muotoon, että negaatioita esiintyy ainoastaan vapaiden muuttujien ja propositiosymboleiden edessä. Käytetään pelistä $\varepsilon(\xi, (\mathfrak{M}, s, V))$ lyhennysmerkintää ε.

- Peli alkaa tilanteesta (ξ, s).
- Peliä pelataan seuraavien sääntöjen mukaisesti:
  - Jos peli on tilanteessa $(\phi_1 \vee \phi_2, s)$, on pelaajan $\exists$ vuoro. Pelaaja $\exists$ valitsee uudeksi tilanteeksi tilanteen joukosta $\{(\phi_1, s), (\phi_2, s)\}$.
  - Jos peli on tilanteessa $(\phi_1 \wedge \phi_2, s)$, on pelaajan $\forall$ vuoro. Pelaaja $\forall$ valitsee uudeksi tilanteeksi tilanteen joukosta $\{(\phi_1, s), (\phi_2, s)\}$.
  - Jos peli on tilanteessa $([a]\phi, s)$, on pelaajan $\forall$ vuoro. Pelaaja $\forall$ valitsee uudeksi tilanteeksi tilanteen joukosta $\{(\phi, t) \mid t \in scc_a^{\mathfrak{M}}(s)\}$.
  - Jos peli on tilanteessa $(\langle a\rangle\phi, s)$, on pelaajan $\exists$ vuoro. Pelaaja $\exists$ valitsee uudeksi tilanteeksi tilanteen joukosta $\{(\phi, t) \mid t \in scc_a^{\mathfrak{M}}(s)\}$.
  - Jos peli on tilanteessa $(\eta_X X.\phi_X, s)$, niin peli siirtyy tilanteeseen (ϕ_X, s).
  - Jos peli on tilanteessa (X, s), missä X on sidottu muuttuja, niin peli siirtyy tilanteeseen (ϕ_X, s).

- Jos peli on tilanteessa (P, s), missä P on looginen vakio, propositiosymboli, vapaa muuttuja tai jonkin näistä negaatio, niin peli päättyy tähän.

- Jos peli päättyy siihen, että pelaaja ei voi tehdä valintaa, niin vastustaja voittaa pelin automaattisesti.

- Mikäli peli päättyy tilanteeseen (P, s), niin pelaaja $\exists$ voittaa pelin, mikäli $(\mathfrak{M}, s, V) \vDash P$. Jos $(\mathfrak{M}, s, V) \nvDash P$ pelaaja $\forall$ voittaa pelin.

- Jos peli ei pääty edellä mainituilla tavoilla, on peli ääretön.

  Olkoon peli ε ääretön. Nyt peliä ε vastaa ääretön jono pelattuja tilanteita. Olkoon
  $$(\xi, s)(\phi_1, s_i) \dots (\phi_n, s_n) \dots$$
  kyseinen jono. Nyt laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa sellainen muuttuja X joka esiintyy jonossa $\pi = (\xi, \phi_1, \dots, \phi_n, \dots)$ äärettömän monta kertaa.

- Äärettömän pelin voittaja ratkaistaan seuraavasti:

  - Merkinnällä $Unf^{\infty}(\pi)$ tarkoitetaan joukkoa, joka sisältää jokaisen kaavassa ξ sidotun muuttujan, joka esiintyy jonossa π äärettömän usein. Olkoon $Unf^{\infty}_{\eta}(\pi)$ vastaava joukko, jossa jokainen muuttuja X on korvattu sitä sitovalla kiintopisteoperaattorilla η_X.
  - Pelaaja $\exists$ voittaa pelin, jos $max_{\leq_\xi}(Unf^{\infty}_{\eta}(\pi)) = \nu_X$, kun taas pelaaja $\forall$ voittaa pelin, jos $max_{\leq_\xi}(Unf^{\infty}_{\eta}(\pi)) = \mu_X$, missä $X \in \mathbb{X}$. Merkinnällä $max_{\leq_\xi}(A)$ tarkoitetaan joukon A suurinta alkiota määritelmässä 3.11 määritellyn osittaisen järjestyksen $\leq_\xi$ suhteen. Kun peli on ääretön on helppoa nähdä, että joukko $Unf^{\infty}_{\eta}(\pi)$ sisältää aina suurimman alkion osittaisen järjestyksen $\leq_\xi$ suhteen.

Pelaajalla $\exists$ sanotaan olevan voittostrategia pelissa ε mikäli riippumatta pelaajan $\forall$ valinnoista pelaaja $\exists$ voi pelata peliä siten, että $\exists$ voitaa pelin ε. Jos pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $\varepsilon(\xi, (\mathfrak{M}, s, V))$, niin sanotaan, että kaava ξ on peliteoreettisesti tosi mallissa $\mathfrak{M}$, pisteessä s, valuaatiolla V ja merkitään $(\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \xi$.

Lause 3.7. *Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi, $s \in S^{\mathfrak{M}}$, V valuaatio ja ϕ $L\mu$-kaava. Nyt*
$$(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \phi.$$

Todistus. (Vrt. [7, s. 25].) Oletetaan, että ϕ on puhdas $L\mu$-kaava, joka on saatettu siihen muotoon, että negaatioita esiintyy ainoastaan propositiosymboleiden ja vapaiden muuttujien edessä. Todistetaan väite induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen.

Todistukset propositiosymboleille $p \in \mathbb{P}$, joukkomuuttujille $X \in \mathbb{X}$, niiden negaatioille, konjunktioille, disjunktioille ja modaalioperaattoreille ovat verrattain yksinkertaisia ja intuitiivisia, joten ne sivuutetaan.

Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalle $\phi(X)$. Todistetaan väite ensin pienimmälle kiintopisteoperaattorille.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että $(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \mu X.\phi(X)$, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että $s \in \bigcap\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\phi(X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[X:=T]} \subseteq T\}$ ja olkoon $W := \{s \in S^{\mathfrak{M}} \mid (\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \mu X.\phi(X)\}$. Nyt riittää todistaa, että $\|\phi(X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[X:=W]} \subseteq W$, sillä tästä seuraa, että $s \in W$, eli $(\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \mu X.\phi(X)$. Käytetään lyhennysmerkintää $V' = V[X := W]$.

Valitaan mielivaltainen $t \in S^{\mathfrak{M}}$ ja oletetaan, että $(\mathfrak{M}, t, V') \vDash \phi(X)$. Tarkoituksena on todistaa, että tällöin $(\mathfrak{M}, t, V') \vDash X$. Induktio-oletuksen perusteella pätee, että $(\mathfrak{M}, t, V') \Vdash \phi(X)$. Siis pelaajalla $\exists$ on voittostrategia f' pelissä $G' = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V'))$. Selvästi pätee, että

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, t, V') \vDash X \\
&\quad \Leftrightarrow t \in V'(X) \\
&\quad \Leftrightarrow t \in W \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, t, V) \Vdash \mu X.\phi(X) \\
&\quad \Leftrightarrow \text{Pelaajalla } \exists \text{ on voittostrategia } f \text{ pelissä } G = \varepsilon(\mu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V)).
\end{aligned}
$$

Nyt siis riittää todistaa, että jos pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä G', niin pelaajalla $\exists$ on voittostrategia myös pelissä G. Todistetaan tämä pelaamalla pelejä G ja G' samanaikaisesti seuraavan taulukon mukaisesti.

Pelit	$G = \varepsilon(\mu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V))$	$G' = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V'))$
Alkutilanne	$(\mu X.\phi(X), t)$	$(\phi(X), t)$
	$(\phi(X), t)$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	(X, u)	(X, u)
	$(\phi(X), u)$	

Oletetaan, että peliä G' pelataan pelaajan $\exists$ voittostrategian f' mukaisesti. Pelit G ja G' alkavat tilanteesta $(\mu X.\phi(X), t)$ ja $(\phi(X), t)$. Pelin sääntöjen perusteella peli G siirtyy välittömästi tilanteeseen $(\phi(X), t)$, jolloin molemmat pelit ovat samassa tilanteessa. Olennaista on se, että pelit G ja G' eroavat toisistaan ainoastaan tilanteen (X, u), missä $u \in S^{\mathfrak{M}}$, käsittelyn suhteen. Siis, jos pelattaessa peliä G' voittostrategian f' mukaisesti ei koskaan jouduta tilanteeseen, joka on muotoa (X, u), niin f' toimii pelaajan $\exists$ voittostrategiana myös pelissä G, josta väite seuraa. Oletetaan, että pelejä G ja G' on pelattu siten, että pelaajan $\forall$ siirrot pelissä G on siirretty peliin G', josta on palautettu peliin G voittostrategian f' ehdottama pelaajan $\exists$ siirto ja molemmissa peleissä ollaan päädytty tilanteeseen (X, u). Nyt, koska peliä G' on pelattu pelaajan $\exists$ voittostrategian mukaisesti, niin $u \in V'(X)$. Siis $u \in W$ eli pelaajalla $\exists$ on voittostrategia f_u pelissä $G_u = \varepsilon(\mu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, u, V))$. Peli G_u alkaa tilanteesta $(\mu X.\phi(X), u)$ ja siirtyy välittömästi tilanteeseen $(\phi(X), u)$. Nyt pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä G_u tilanteessa $(\phi(X), u)$. Koska myös pelissä G ollaan tilanteessa $(\phi(X), u)$ ja peleissä G_u ja G samoja tilanteita käsitellään täsmälleen samalla tavalla, niin voittostrategiaa f_u voidaan soveltaa peliin G, jolloin $\exists$ voittaa pelin G. Tästä seuraa, että pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä G joudutaan pelissä tilanteeseen muotoa (X, u) tai ei, josta väite seuraa.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että $(\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \mu X.\phi(X)$, siis pelaajalla $\exists$ on voittostrategia f pelissä $G = \varepsilon(\mu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, s, V))$. Tehdään vastaoletus, että $s \notin \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$ eli, että $s \notin \bigcap\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\phi(X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}} \subseteq T\}$. Käytetään lyhennysmerkintää $V' = V[X := \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}]$.

Valitaan mielivaltainen $t \in S^{\mathfrak{M}}$ siten, että $t \notin \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$. Pienimmän kiintopisteen määritelmän perusteella $\|\phi(X)\|_{V'}^{\mathfrak{M}} \subseteq \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$, joten $t \notin \|\phi(X)\|_{V'}^{\mathfrak{M}}$. Tällöin induktio-oletuksesta seuraa, että pelaajalla $\exists$ ei ole voittostrategiaa pelissä $G_t = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V'))$. Erityisesti pelaajalla $\exists$ ei ole voittostrategiaa pelissä $G' = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, s, V'))$, sillä $s \notin \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$. Pelataan pelejä G ja G' yhtäaikaa seuraavan taulukon mukaisesti.

Pelit	$G = \varepsilon(\mu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, s, V))$	$G' = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, s, V'))$
Alkutilanne	$(\mu X.\phi(X), s)$	$(\phi(X), s)$
	$(\phi(X), s)$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	(X, u)	(X, u)
	$(\phi(X), u)$	

Peli G siirtyy välittömästi tilanteeseen $(\phi(X), s)$, jonka jälkeen pelit G ja G' ovat samassa tilanteessa. Pelataan pelejä G ja G' siten, että peliä G pelataan voittostrategian f mukaisesti siten, että pelistä G' siirretään pelaajan $\forall$ siirto peliin G, josta lähetetään peliin G' voittostrategian f ehdottama pelaajan $\exists$ siirto. Huomataan, että pelit G ja G' eroavat toisistaan ainoastaan muotoa (X, u) olevien tilanteiden käsittelyssä joten, jos voittostrategian f mukaan pelatussa pelissä G ei koskaan jouduta tilanteeseen muotoa (X, u), niin pelaajalla $\exists$ olisi voittostrategia myöskin pelissä G', josta seuraisi ristiriita. Siis jossain vaiheessa peliä molemmat pelit päätyvät tilanteeseen (X, u), jossa $u \in S^{\mathfrak{M}}$. Koska pelaajalla $\exists$ ei ole voittostrategiaa pelissä G', niin $u \notin V'(X)$. Valuaation V' määritelmästä seuraa, että $u \notin \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$. Koska $\|\phi(X)\|_{V'}^{\mathfrak{M}} \subseteq \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$, niin $u \notin \|\phi(X)\|_{V'}^{\mathfrak{M}}$, josta induktio-oletuksen perusteella seuraa, että pelaajalla $\exists$ ei ole voittostrategiaa pelissä $G_u = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, u, V'))$. Pelin G_u ja G' ainoa eroavaisuus on se, että peli G_u alkaa tilanteesta $(\phi(X), u)$, kun taas peli G' alkoi tilanteesta $(\phi(X), s)$. Koska peli G on tilanteessa $(\phi(X), u)$, niin pelejä G ja G_u voidaan alkaa pelaamaan samanaikaisesti aivan, kuten pelejä G ja G'. Tästä seuraa, että voittostrategian f mukaan pelatun pelin G täytyy olla ääretön, mutta tällöin korkein kiintopisteoperaattori, joka esiintyy pelatussa pelissä G äärettömän usein on μ, josta seuraa, että $\forall$ voittaa pelin, joten f ei ole voittostrategia pelissä G. Tästä seuraa ristiriita oletusten kanssa, joten vastaoletus on väärin ja $s \in \|\mu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$. Siis $(\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \mu X.\phi(X) \Rightarrow (\mathfrak{M}, s, V) \vDash \mu X\phi(X)$.

Edellisten perusteella $(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \mu X\phi(X) \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \mu X.\phi(X)$.

Todistetaan tämän jälkeen lauseen väite suurimmalle kiintopisteoperaattorille.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että $(\mathfrak{M}.s, V) \vDash \nu X.\phi(X)$. Tehdään vastaoletus, että $(\mathfrak{M}, s, V) \nVdash \nu X.\phi(X)$, eli toisin sanoen pelaajalla $\exists$ ei ole voittostrategiaa pelissä $G = \varepsilon(\nu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, s, V))$. Käytetään lyhennysmerkintää $V' = V[X := \|\nu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}]$.

Suurimman kiintopisteen määritelmästä seuraa, että

$$\|\nu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}} \subseteq \|\phi(X)\|_{V'}^{\mathfrak{M}}. \tag{3.4}$$

Valitaan mielivaltainen $t \in S^{\mathfrak{M}}$. Nyt

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, t, V) \vDash \nu X.\phi(X) \\
&\quad \Rightarrow^{3.4} (\mathfrak{M}, t, V') \vDash \phi(X) \\
&\quad \Leftrightarrow^{IO} (\mathfrak{M}, t, V') \Vdash \phi(X) \\
&\quad \Leftrightarrow \text{Pelaajalla } \exists \text{ on voittostrategia } f_t \text{ pelissä } G_t = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V')).
\end{aligned}$$

Nyt siis pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $G_s = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, s, V'))$. Pelataan pelejä G ja G_s yhtäaikaa seuraavan taulukon mukaisesti.

Pelit	$G = \varepsilon(\nu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, s, V))$	$G_s = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, s, V'))$
Alkutilanne	$(\nu X.\phi(X), s)$	$(\phi(X), s)$
	$(\phi(X), s)$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	(X, u)	(X, u)
	$(\phi(X), u)$	

Peli G siirtyy välittömästi tilanteeseen $(\phi(X), s)$, jonka jälkeet pelit G ja G_s ovat samassa tilanteessa. Pelataan pelejä G ja G_s siten, että peliä G_s pelataan pelaajan $\exists$ voittostrategian f_s mukaisesti siten, että pelistä G siirretään pelaajan $\forall$ siirrot peliin G_s josta lähetetään peliin G voittostrategian f_s ehdottama pelaajan $\exists$ siirto. Huomataan että pelit G ja G_s eroavat toisistaan ainoastaan muotoa (X, u) olevien tilanteiden käsittelyssä joten, jos voittostrategian f_s mukaan pelatussa pelissä ei koskaan jouduta muotoa (X, u) olevaan tilanteeseen, niin pelaajalla $\exists$ olisi voittostrategia myöskin pelissä G, josta seuraisi ristiriita. Siis jossain vaiheessa peliä molemmat pelit päätyvät tilanteeseen (X, u), jossa $u \in S^{\mathfrak{M}}$. Koska peliä G_s pelataan voittostrategian f_s mukaisesti, niin $u \in V'(X)$, joten $u \in \|\nu X.\phi(X)\|_V^{\mathfrak{M}}$. Kaavan

3.4 ja induktio-oletuksen perusteella pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä $G_u = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, u, V'))$. Peli G_u alkaa tilanteesta $(\phi(X), u)$, siis samasta tilanteesta, johon pelissä G on päädytty. Koska pelit G ja G_u eroavat toisistaan täsmälleen samalla tavalla kuin pelit G ja G_s nähdään helposti, että pelaamalla pelejä G ja G_u voittostrategian f_u mukaisesti siten, että pelaaja $\exists$ ei voittaisi peliä G, on pelien jälleen päädyttävä johonkin muotoa (X, v) olevaan tilanteeseen. Tästä seuraa induktiivisesti, että pelissä G pelataan kaavaa X äärettömän usein. Koska muuttujaa X sitoo kiintopisteoperaattori ν, niin valuaatiopelin sääntöjen perusteella $\exists$ voittaa pelin, mikä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärin ja $(\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \nu X.\phi(X)$.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että $(\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \nu X.\phi(X)$ ja olkoon $W = \{s \in S^{\mathfrak{M}} \mid (\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \nu X.\phi(X)\}$. Nyt riittää todistaa, että $W \subseteq \|\phi(X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[X:=W]}$, sillä silloin

$$W \subseteq \bigcup \{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid T \subseteq \|\phi(X)\|^{\mathfrak{M}}_{V[X:=T]}\} = \|\nu X.\phi(X)\|^{\mathfrak{M}}_{V}.$$

Käytetään lyhennysmerkintää $V' = V[X := W]$.

Valitaan mielivaltainen $t \in S^{\mathfrak{M}}$. Nyt $t \in W$, joss pelaajalla $\exists$ on voittostrategia f_t pelissä $G_t = \varepsilon(\nu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V))$. Selvästi pätee, että

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, t, V') \vDash \phi(X) \\
&\quad \Leftrightarrow^{IO} (\mathfrak{M}, t, V') \Vdash \phi(X) \\
&\quad \Leftrightarrow \text{Pelaajalla } \exists \text{ on voittostrategia pelissä } G' = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V')).
\end{aligned}$$

Riittää siis todistaa, että jos pelaajalla $\exists$ on voittostrategia f_t pelissä G_t, niin pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissa G'. Todistetaan tämä pelaamalla pelejä G' ja G_t samanaikaisesti seuraavan taulukon mukaisesti.

Pelit	$G_t = \varepsilon(\nu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V))$	$G' = \varepsilon(\phi(X), (\mathfrak{M}, t, V'))$
Alkutilanne	$(\nu X.\phi(X), t)$	$(\phi(X), t)$
	$(\phi(X), t)$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	(X, u)	(X, u)
	$(\phi(X), u)$	

Peli G_t siirtyy välittömästi tilanteeseen $(\phi(X), t)$, jonka jälkeen pelit G' ja G_t ovat samassa tilanteessa. Pelataan pelejä G_t ja G' siten, että peliä G_t pelataan pelaajan $\exists$ voittostrategian f_t mukaisesti siten, että pelistä G' siirretään pelaajan $\forall$ siirrot peliin G_t, josta lähetetään peliin G' voittostrategian f_t ehdottama pelaajan $\exists$ siirto. Huomataan että pelit G_t ja G' eroavat toisistaan ainoastaan muotoa (X, u) olevien tilanteiden käsittelyssä joten, jos voittostrategian f_t mukaan pelatussa pelissä ei koskaan jouduta muotoa (X, u) olevaan tilanteeseen, niin pelaajalla $\exists$ olisi voittostrategia myös pelissä G', josta väite seuraa. Oletetaan siis, että jossain vaiheessa peliä molemmat pelit päätyvät tilanteeseen (X, u) ja tehdään vastaoletus, että pelaaja $\forall$ voittaa pelin G'. Tässä tapauksessa $u \notin V'(X)$, joten $u \notin W$. Joukon W valinnan perusteella pelaajalla $\exists$ ei ole voittostrategiaa pelissä $G = \varepsilon(\nu X.\phi(X), (\mathfrak{M}, u, V))$. Peli G alkaa tilanteesta $(\nu X.\phi(X), u)$ ja siirtyy välittömästi tilanteeseen $(\phi(X), u)$, siis tilanteeseen, jossa pelissä G_t ollaan. Peleissä G ja G_t samoja tilanteita käsitellään täsmälleen samalla tavalla. Oletusten perusteella, ja koska peliä G_t ollaan tähän asti pelattu voittostrategian f_t mukaisesti, tilanteessa $(\phi(X), u)$ pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä G_t, mutta ei pelissä G, mikä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärin ja pelaajalla $\exists$ on voittostrategia pelissä G', josta väite seuraa.

Siis on todistettu, että $(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \nu X.\phi(X) \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \nu X.\phi(X)$, jos väite pätee kaavalle $\phi(X)$.

Induktioperiaatteen nojalla $(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, s, V) \Vdash \phi$. □

Lauseen 3.7 μ-askeleen todistus on uudelleenmuotoilu Veneman todistuksesta luentorungossa [7, s. 25], ν-askeleen todistamisessa on sovellettu μ-askeleessa käytettyjä työkaluja.

3.1.4 Tuloksia μ-kalkyylistä

Määritelmä 3.13. Olkoon C luokka transitiosysteemejä. Sanotaan, että *$L\mu$-lause ϕ määrittelee luokan C*, jos

$$C = C^{L\mu}(\phi) = \{\mathfrak{M} \mid (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}) \vDash \phi\}.$$

Luokka C on *$L\mu$-määriteltävä* jos on olemassa sellainen $L\mu$-lause ϕ, joka määrittelee kyseisen luokan.

Määritelmä 3.14. Olkoon C luokka transitiosysteemejä. Sanotaan, että *$L\mu$-kaava ϕ määrittelee luokan C*, jos

$$C = C^{L\mu}(\phi) = \{\mathfrak{M} \mid (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi \text{ kaikilla valuaatiolla } V\}.$$

Luokka C on *$L\mu$-kaavamääriteltävä* jos on olemassa sellainen $L\mu$-kaava ϕ, joka määrittelee kyseisen luokan.

Korollaari 3.2. *Jokainen $L\mu$-määriteltävä luokka transitiosysteemejä on $L\mu$-kaavamääriteltävä.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan määriteltävyyden ja kaavamääriteltävyyden määritelmistä. □

Käänteinen tulos ei kuitenkaan pidä paikkaansa.

Korollaari 3.3. *On olemassa $L\mu$-kaavamääriteltävä luokka transitiosysteemejä, joka ei ole $L\mu$-määriteltävä.*

Todistus. Väite seuraa lauseesta 3.11 ja korollaarista 3.4, jotka esitetään jäljempänä. □

Määritelmä 3.15. Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ R-bisimilaarisia transitiosysteemejä ja olkoot V ja V' transitiosysteemejä $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ vastaavia valuaatioita. Valuaatioiden V ja V' sanotaan *kunnioittavan bisimulaatiota* R, mikäli kaikilla joukkomuuttujilla $X \in \mathbb{X}$ pätee, että

$$(s, s') \in R \Rightarrow (s \in V(X) \text{ joss } s' \in V'(X)).$$

Määritelmä 3.16. Olkoon R bisimulaatio transitiosysteemien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ välillä. Määritellään *joukon X generoima R-bisimilaarijoukko* $R(X)$ seuraavalla tavalla. Jos $X \subseteq S^{\mathfrak{M}}$, niin

$$R(X) := \{s' \in S^{\mathfrak{M}'} \mid \exists s \in X : (s, s') \in R\}.$$

Jos taas $X \subseteq S^{\mathfrak{M}'}$, niin

$$R(X) := \{s \in S^{\mathfrak{M}} \mid \exists s' \in X : (s, s') \in R\}.$$

Lause 3.8. *Olkoon R bisimulaatio transitiosysteemien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ välillä ja olkoot $A, B \subseteq S^{\mathfrak{M}}$. Jos $A \subseteq B$, niin $R(A) \subseteq R(B)$.*

Todistus. Oletetaan, että $A \subseteq B$ ja valitaan mielivaltainen $a' \in R(A)$. Määritelmän 3.16 perusteella on olemassa sellainen $a \in S^{\mathfrak{M}}$, että $(a, a') \in R$ ja $a \in A$. Koska $A \subseteq B$, niin $a \in B$ ja määritelmän 3.16 perusteella $a' \in R(B)$. Siis $R(A) \subseteq R(B)$. □

Lause 3.9. *Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ R-bisimilaarisia transitiosysteemejä ja V ja V' valuaatioita, jotka kunnioittavat bisimulaatiota R. Olkoon ϕ sellainen $L\mu$-kaava jolle pätee, että*

$$(s, s') \in R \Rightarrow (\mathfrak{M}, s, V) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}', s', V') \vDash \phi. \tag{3.5}$$

Tällöin

$$R(\|\phi\|_V^{\mathfrak{M}}) \subseteq \|\phi\|_{V'}^{\mathfrak{M}'}.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $s' \in R(\|\phi\|_V^{\mathfrak{M}})$. Määritelmän 3.16 perusteella on olemassa sellainen $s \in S^{\mathfrak{M}}$, että $(s, s') \in R$ ja $s \in \|\phi\|_V^{\mathfrak{M}}$. Oletuksen 3.5 perusteella $s' \in \|\phi\|_{V'}^{\mathfrak{M}'}$, joten $R(\|\phi\|_V^{\mathfrak{M}}) \subseteq \|\phi\|_{V'}^{\mathfrak{M}'}$. □

Lause 3.10. *Olkoot $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ R-bisimilaarisia transitiosysteemejä, joihin liittyvät valuaatiot V ja V' kunnioittavat bisimulaatiota R. Nyt kaikille $L\mu$-kaavoille ϕ pätee, että*

$$(s, s') \in R \Rightarrow ((\mathfrak{M}, s, V) \models \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}', s', V') \models \phi).$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen pari $(s, s') \in R$ ja todistetaan induktiolla kaavan pituuden suhteen, että $(\mathfrak{M}, s, V) \models \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}', s', V') \models \phi$. Symmetrisyyden perusteella riittää todistaa, että $(\mathfrak{M}, s, V) \models \phi \Rightarrow (\mathfrak{M}', s', V') \models \phi$.

1. Määritelmästä 2.12 seuraa, että jos $(s, s') \in R$, niin s ja s' toteuttavat samat propositiosymbolit.

2. Oletetaan, että $(\mathfrak{M}, s, V) \models X$. Siis $s \in \|X\|_V^{\mathfrak{M}} = V(X)$, joten $s' \in V'(X)$ ja edelleen $s' \in \|X\|_{V'}^{\mathfrak{M}'}$ eli $(\mathfrak{M}', s', V') \models X$.

3. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kun $\phi = \vartheta$. Oletetaan, että $(\mathfrak{M}, s, V) \models \neg\vartheta$, joten $(\mathfrak{M}, s, V) \not\models \vartheta$. Induktio-oletuksen perusteella $(\mathfrak{M}', s', V') \not\models \vartheta$, joten $(\mathfrak{M}', s', V') \models \neg\vartheta$.

4. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kun $\phi = \vartheta_1$ ja kun $\phi = \vartheta_2$. Oletetaan, että $(\mathfrak{M}, s, V) \models \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$. Nyt $(\mathfrak{M}, s, V) \models \vartheta_1$ ja $(\mathfrak{M}, s, V) \models \vartheta_2$ ja induktio-oletuksesta seuraa, että $(\mathfrak{M}', s', V') \models \vartheta_1$ ja $(\mathfrak{M}', s', V') \models \vartheta_2$. Siis $(\mathfrak{M}', s', V') \models \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$.

5. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kun $\phi = \vartheta$. Valitaan mielivaltainen $a \in \mathbb{L}$ ja oletetaan, että $(\mathfrak{M}, s, V) \models \langle a \rangle \vartheta$. Siis on olemassa sellainen $t \in S^{\mathfrak{M}}$, että $t \in scc_a^{\mathfrak{M}}(s)$ ja $(\mathfrak{M}, t, V) \models \vartheta$. Bisimulaation määritelmästä 2.12 seuraa, että on olemassa sellainen $t' \in S^{\mathfrak{M}'}$, että $t' \in scc_a^{\mathfrak{M}'}(s')$ ja $(t, t') \in R$. Induktio-oletuksen perusteella $(\mathfrak{M}', t', V') \models \vartheta$, joten $(\mathfrak{M}', s', V') \models \langle a \rangle \vartheta$.

6. Todistetaan väite suurimmalle kiintopisteoperaattorille. Olkoon $\phi(X)$ sellainen $L\mu$-kaava, jossa muuttuja X esiintyy vain positiivisesti. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalle $\phi(X)$.

   Oletetaan, että $(\mathfrak{M}, s, V) \models \nu X.\phi(X)$. Suurimman kiintopisteen määritelmän perusteella $s \in \bigcup\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid T \subseteq \|\phi(X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}}\}$. Siis on olemassa sellainen $T_0 \subseteq S^{\mathfrak{M}}$, että $s \in T_0$ ja $T_0 \subseteq \|\phi(X)\|_{V[X:=T_0]}^{\mathfrak{M}}$. Nyt

   $$\begin{aligned} T_0 \subseteq \|\phi(X)\|_{V[X:=T_0]}^{\mathfrak{M}} &\Rightarrow^{\text{L } 3.8} R(T_0) \subseteq R(\|\phi(X)\|_{V[X:=T_0]}^{\mathfrak{M}}) \\ &\Rightarrow_{\text{IO}}^{\text{L } 3.9} R(T_0) \subseteq \|\phi(X)\|_{V'[X:=R(T_0)]}^{\mathfrak{M}'}. \end{aligned}$$

   Siitä, että $s \in T_0$ ja $(s, s') \in R$ seuraa, että $s' \in R(T_0)$. Koska $R(T_0) \subseteq \|\phi(X)\|_{V'[X:=R(T_0)]}^{\mathfrak{M}'}$, niin $R(T_0) \in \{T \subseteq S^{\mathfrak{M}'} \mid T \subseteq \|\phi(X)\|_{V'[X:=T]}^{\mathfrak{M}'}\}$, joten $s' \in \bigcup\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}'} \mid T \subseteq \|\phi(X)\|_{V'[X:=T]}^{\mathfrak{M}'}\}$. Täten $(\mathfrak{M}', s', V) \models \nu X.\phi(X)$.

Induktioperiaatteen nojalla $(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}', s', V') \vDash \phi$. $\square$

Lause 3.11. *Jokainen $L\mu$-määritelty luokka transitiosysteemejä on bisimulaation suhteen suljettu.*

Todistus. (Vrt. [6, s. 245].) Valitaan mielivaltainen $L\mu$-lause ϕ ja todistetaan, että sen määräämä luokka $C^{L\mu}(\phi)$ on suljettu bisimulaation suhteen. Valitaan mielivaltainen transitiosysteemi $\mathfrak{M} \in C^{L\mu}(\phi)$ ja mielivaltainen sen kanssa bisimilaarinen transitiosysteemi $\mathfrak{M}'$. Olkoon R jokin transitiosysteemien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ välillä oleva bisimulaatio. Todistetaan, että kaikilla valuaatioilla V ja V' pätee, että $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}', sr^{\mathfrak{M}'}, V') \vDash \phi$. Koska ϕ on lause, niin sen toteutuvuus mallissa ei riipu valuaatiosta, joten valuaatiot voidaan kiinnittää. Valitaan valuaatiot V ja V' siten, että ne kunnioittavat bisimulaatiota R. Määritelmän 2.12 perusteella $(sr^{\mathfrak{M}}, sr^{\mathfrak{M}'}) \in R$, joten lauseesta 3.10 seuraa suoraan että $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}', sr^{\mathfrak{M}'}, V') \vDash \phi$ kaikilla kaavoilla ϕ. Koska valittu ϕ on lause, niin $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}', sr^{\mathfrak{M}'}) \vDash \phi$. Siis $\mathfrak{M}' \in C^{L\mu}(\phi)$, joten luokka $C^{L\mu}(\phi)$ on suljettu bisimulaation suhteen. $\square$

Esimerkki 3.6. (Vrt. [6, s. 245].) Olkoon $\phi = \neg(\langle r\rangle X \wedge \langle r\rangle\neg X)$ ja olkoon $C = C^{L\mu}(\phi)$ sen määräämä luokka transitiosysteemejä. Siis $C = C^{L\mu}(\phi) = \{\mathfrak{M} \mid (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi,$ kaikilla valuaatioilla $V\}$.

Siis luokka C sisältää sellaiset transitiosysteemit $\mathfrak{M}$, joissa jokaisella valuaatiolla V $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \nvDash \langle r\rangle X$ tai $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \nvDash \langle r\rangle\neg X$. Siis jokaisella valuaatiolla V $scc_r^{\mathfrak{M}}(sr^{\mathfrak{M}}) \cap V(X) = \emptyset$ tai $scc_r^{\mathfrak{M}}(sr^{\mathfrak{M}}) \subseteq V(X)$.

Olkoon $\mathfrak{M} = (S^{\mathfrak{M}}, sr^{\mathfrak{M}}, r^{\mathfrak{M}}, p^{\mathfrak{M}})$ transitiosysteemi, jossa $S^{\mathfrak{M}} = \{1, 2\}$, $sr^{\mathfrak{M}} = 1$, $r^{\mathfrak{M}} = \{(1, 2)\}$ ja $p^{\mathfrak{M}} = \{2\}$. Valitaan mielivaltainen valuaatio V. Nyt $V(X) \subseteq \{1, 2\}$. Käydään läpi kaikki mahdolliset valuaation V valinnat. Jos $V(X) = \emptyset$ tai $V(X) = \{1\}$, niin $scc_r^{\mathfrak{M}}(sr^{\mathfrak{M}}) \cap V(X) = \emptyset$. Jos taas $V(X) = \{2\}$ tai $V(X) = \{1, 2\}$, niin $scc_r^{\mathfrak{M}}(sr^{\mathfrak{M}}) \subseteq V(X)$. Tästä seuraa, että jokaisella valuaatiolla V $scc_r^{\mathfrak{M}}(sr^{\mathfrak{M}}) \cap V(X) = \emptyset$ tai $scc_r^{\mathfrak{M}}(sr^{\mathfrak{M}}) \subseteq V(X)$, joten $\mathfrak{M} \in C$.

Olkoon $\mathfrak{M}' = (S^{\mathfrak{M}'}, sr^{\mathfrak{M}'}, r^{\mathfrak{M}'}, p^{\mathfrak{M}'})$ transitiosysteemi, jossa $S^{\mathfrak{M}'} = \{1, 2, 3\}$, $sr^{\mathfrak{M}'} = 1$, $r^{\mathfrak{M}'} = \{(1, 2), (1, 3)\}$ ja $p^{\mathfrak{M}'} = \{2, 3\}$. Selvästi $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{M}'$ ovat bisimilaarisia. Valitaan valuaatio V siten, että $V(X) = \{2\}$. Nyt selvästi $scc_r^{\mathfrak{M}}(sr^{\mathfrak{M}}) \cap V(X) = \{2\} \neq \emptyset$ ja $scc_r^{\mathfrak{M}}(sr^{\mathfrak{M}}) = \{2, 3\} \nsubseteq V(X) = \{2\}$, joten $\mathfrak{M}' \notin C$. Tästä seuraa, että C ei ole bisimilaarisesti suljettu joukko transitiosysteemejä.

Korollaari 3.4. *On olemassa $L\mu$-kaavamääritelty luokka transitiosysteemejä, joka ei ole bisimulaation suhteen suljettu.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan esimerkistä 3.6 $\square$

Määritelmä 3.17. Olkoon ϕ jokin $L\mu$-kaava. Kaavaa ϕ sanotaan *positiiviseksi*, jos jokainen kaavassa ϕ esiintyvä vapaa muuttuja esiintyy ainoastaan positiivisesti. Kaavaa ϕ sanotaan *monotoniseksi*, jos jokaisella kaavassa ϕ esiintyvällä vapaalla muuttujalla X funktio $f_{\phi(X)}$ on monotoninen.

Lause 3.12. *Olkoon $\phi(X)$ $L\mu$-kaava, jonka merkitysfunktio $f_{\phi(X)}$ on monotoninen ja olkoon $C^{L\mu}(\phi(X))$ luokka transitiosysteemejä, jonka kaava $\phi(X)$ määrittelee. Kaavan $\phi(\bot)$, jossa jokainen muuttujan X esiintymä kaavassa $\phi(X)$ on korvattu loogisella vakiolla $\bot$, määrittelemälle luokkalle transitiosysteemejä $C^{L\mu}(\phi(\bot))$ pätee, että $C^{L\mu}(\phi(\bot)) = C^{L\mu}(\phi(X))$.*

Todistus. ($\subseteq$) Olkoon V mielivaltainen valuaatio. Valitaan mielivaltainen transitiosysteemi $\mathfrak{M} \in C^{L\mu}(\phi(\bot))$. Siis pätee, että $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi(\bot)$. Selvästi $f^V_{\phi(X)}(\emptyset) = \|\phi(\bot)\|^{\mathfrak{M}}_V$. Funktion $f^V_{\phi(X)}$ monotonisuudesta seuraa, että $\|\phi(\bot)\|^{\mathfrak{M}}_V \subseteq f^V_{\phi(X)}(A)$ kaikilla $A \subseteq S^{\mathfrak{M}}$. Koska $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi(\bot)$, niin $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi(X)$. Koska V valittiin mielivaltaisesti, niin $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi(X)$ kaikilla valuaatiolla V. Siis $\mathfrak{M} \in C^{L\mu}(\phi(X))$. On siis todistettu, että $C^{L\mu}(\phi(\bot)) \subseteq C^{L\mu}(\phi(X))$.

($\supseteq$) Valitaan mielivaltainen transitiosysteemi $\mathfrak{M} \in C^{L\mu}(\phi(X))$. Selvästi $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi(X)$ kaikilla valuaatioilla V. Erityisesti $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi(X)$ kaikilla sellaisilla valuaatiolla V, joilla $V(X) = \emptyset$. Tästä seuraa, että $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi(\bot)$ kaikilla valuaatioilla V, sillä $\|\bot\| = \emptyset$, joten $\mathfrak{M} \in C^{L\mu}(\phi(\bot))$. On siis todistettu, että $C^{L\mu}(\phi(X)) \subseteq C^{L\mu}(\phi(\bot))$.

Siis $C^{L\mu}(\phi(\bot)) = C^{L\mu}(\phi(X))$. □

Määritelmä 3.18. Kaavoja ϕ ja ϑ sanotaan *ekvivalenteiksi*, mikäli niiden määräämille transitiosysteemiluokille pätee, että $C(\phi) = C(\vartheta)$.

Korollaari 3.5. *Olkoon ϕ monotoninen $L\mu$-kaava. Nyt $L\mu$-lause ϑ, joka saadaan korvaamalla jokainen kaavassa ϕ esiintyvä vapaa muuttuja loogisella vakiolla $\bot$, on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa.*

Todistus. Sovelletaan lausetta 3.12 jokaiseen kaavan ϕ vapaaseen muuttujaan, josta väite seuraa. □

Korollaari 3.6. *Olkoon ϕ $L\mu$-kaava, jossa vapaat muuttujat esiintyvät ainoastaan positiivisesti ja olkoon ϑ $L\mu$-lause, joka saadaan korvaamalla jokainen kaavan ϕ vapaana esiintyvä muuttuja loogisella vakiolla $\bot$. Nyt ϕ ja ϑ ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan lauseesta 3.5 ja korollaarista 3.5. □

Korollaari 3.7. *Olkoon ϕ $L\mu$-kaava, jossa jokainen vapaa muuttuja esiintyy joko ainoastaan positiivisesti tai ainoastaan negatiivisesti ja olkoon ϑ $L\mu$-lause, joka saadaan korvaamalla jokainen kaavan ϕ positiivisesti vapaana esiintyvä muuttuja loogisella vakiolla $\bot$ ja jokainen negatiivisesti vapaana esiintyvä muuttuja loogisella vakiolla $\top$. Nyt ϕ ja ϑ ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Valitaan mielivaltainen transitiosysteemi $\mathfrak{M}$. On helppoa nähdä, että

$$(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}) \vDash \phi'$$

missä ϕ' on saatu kavasta ϕ korvaamalla jokainen kaavassa ϕ negatiivisesti esiintyvä vapaa muuttuja X kaavassa ϕ ennestään esiintymättömän muuttujan X' negaatiolla. Näin muodostetussa kaavassa ϕ' vapaat muuttujat esiintyvät ainoastaan positiivisesti, joten tulos seuraa suoraan korollaarista 3.6. □

3.2 Monadinen toisen kertaluvun predikaattilogiikka

Määritelmä 3.19. *Monadisen toisen kertaluvun predikaattilogiikan, lyhyemmin MSO, aakkosto* muodostuu joukkomuuttujista $\mathbb{X}$, yksipaikkaisista predikaattisymboleista $\mathbb{P}$, kaksipaikkaisista predikaattisymboleista $\mathbb{R}$ ja vakiosymbolista sr. Sen kaavat muodostuvat seuraavasti.

- Jos $X \in \mathbb{X}$, niin $sr(X)$ on kaava.
- Jos $X \in \mathbb{X}$ ja $p \in \mathbb{P}$, niin $p(X)$ on kaava.
- Jos $X, Y \in \mathbb{X}$, niin $X \subseteq Y$ on kaava.
- Jos ϕ on kaava niin $\neg\phi$ on kaava.
- Jos ϕ_1 ja ϕ_2 ovat kaavoja, niin $\phi_1 \wedge \phi_2$ on kaava.
- Jos $r \in \mathbb{R}$ ja $X, Y \in \mathbb{X}$, niin $r(X, Y)$ on kaava.
- Jos $X \in \mathbb{X}$ ja ϕ on kaava, niin $\exists X.\phi(X)$ on kaava.

Muut konnektiivit määritellään tavanomaisella tavalla edellisistä.

Määritelmä 3.20. Muuttujan $X \in \mathbb{X}$ esiintymää MSO-kaavassa ϕ sanotaan *sidotuksi*, jos se on jonkin kvanttorin $\forall X$ tai $\exists X$ vaikutuspiirissä. Muuttujan esiintymää sanotaan *vapaaksi*, jos se ei ole sidottu.

Esimerkki 3.7. Kaavassa $\forall X(X \wedge Y) \vee X$ muuttujan Y esiintyymä on vapaa, ensimmäinen muuttujan X esiintymä on sidottu ja jälkimmäinen vapaa.

Määritelmä 3.21. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja V valuaatio. Määritellään MSO-kaavojan toteutuvuus induktiivisesti seuraavalla tavalla.

- $(\mathfrak{M}, V) \vDash sr(X)$, joss $V(X) = \{sr^{\mathfrak{M}}\}$,
- $(\mathfrak{M}, V) \vDash p(X)$, joss $V(X) \subseteq p^{\mathfrak{M}}$,
- $(\mathfrak{M}, V) \vDash X \subseteq Y$, joss $V(X) \subseteq V(Y)$,
- $(\mathfrak{M}, V) \vDash \neg\phi$, joss $(\mathfrak{M}, V) \vDash \phi$ ei päde,
- $(\mathfrak{M}, V) \vDash \phi_1 \wedge \phi_2$, joss $(\mathfrak{M}, V) \vDash \phi_1$ ja $(\mathfrak{M}, V) \vDash \phi_2$,
- $(\mathfrak{M}, V) \vDash r(X, Y)$, joss on olemssa sellaiset $s, t \in S^{\mathfrak{M}}$, että $V(X) = \{s\}$, $V(Y) = \{t\}$ ja $(s, t) \in r^{\mathfrak{M}}$,

- $(\mathfrak{M}, V) \vDash \exists X.\phi(X)$, joss on olemassa sellainen $T \subseteq S^{\mathfrak{M}}$ jolla pätee, että $(\mathfrak{M}, V[X := T]) \vDash \phi(X)$.

Määritelmä 3.22. Otetaan käyttöön lyhennysmerkintä

$$\begin{aligned} sing(X) =& \forall A((A \subseteq X \wedge \neg(X \subseteq A)) \to \forall B(A \subseteq B)) \\ & \wedge \exists C(C \subseteq X \wedge \neg(X \subseteq C)). \end{aligned}$$

Lyhennysmerkintä $sing(X)$ tarkoittaa siis, että joukkoon X kuuluu täsmälleen yksi alkio.

Määritelmä 3.23. Olkoon C luokka transitiosysteemejä. Sanotaan, että *MSO-lause ϕ määrittelee luokan C*, jos

$$C = C^{MSO}(\phi) = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \vDash \phi\}.$$

Luokka C on *MSO-määriteltävä* jos on olemassa sellainen MSO-lause ϕ, joka määrittelee kyseisen luokan.

Määritelmä 3.24. Olkoon C luokka transitiosysteemejä. Sanotaan, että *MSO-kaava ϕ määrittelee luokan C*, jos

$$C = C^{MSO}(\phi) = \{\mathfrak{M} \mid (\mathfrak{M}, V) \vDash \phi, \text{ jokaisella valuaatiolla } V\}.$$

Luokka C on *MSO-kaavamääriteltävä* jos on olemassa sellainen MSO-kaava ϕ, joka määrittelee kyseisen luokan.

Lause 3.13. (Vrt. [6, s. 245].) *Luokka C transitiosysteemejä on MSO-määriteltävä, joss se on MSO-kaavamääriteltävä.*

Todistus. ($\Rightarrow$) Selvästi jokainen MSO-määriteltävä luokka on myös MSO-kaavamääriteltävä.

($\Leftarrow$) Olkoon $\phi(X_0, \dots, X_n)$ mielivaltainen MSO-kaava, jonka vapaana esiintyvät muuttujat ovat $X_0, \dots, X_n$ ja olkoon $C = C^{MSO}(\phi(X_0, \dots, X_n))$ sen määrittämä luokka transitiosysteemejä. Olkoon

$$\vartheta := \forall X_0 \dots \forall X_n(\phi(X_0, \dots, X_n)).$$

Selvästi ϑ on MSO-lause. On helppoa nähdä, että

$$(\mathfrak{M}, V) \vDash \phi(X_0, \dots, X_n) \text{ kaikilla valuaatioilla } V \Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \vartheta.$$

Siis $C^{MSO}(\phi(X_0, \dots, X_n)) = C^{MSO}(\vartheta)$, joten jokainen MSO-kaavamääriteltävä luokka on myös MSO-määriteltävä. $\square$

3.3 Standardikäännös: $L\mu \to MSO$

Määritelmä 3.25. (Vrt. [6, s. 246].) Olkoon ϕ mielivaltainen $L\mu$-kaava ja olkoon X jokin sellainen muuttuja, joka ei esiinny kaavassa ϕ. Kaavan ϕ standardikäännös $ST_X(\phi)$ muuttujan X suhteen määritellään induktiivisesti seuraavalla tavalla.

$$ST_X(Y) = X \subseteq Y, \tag{3.6}$$

$$ST_X(p) = p(X), \tag{3.7}$$

$$ST_X(\neg\phi) = \neg ST_X(\phi)), \tag{3.8}$$

$$ST_X(\phi \wedge \vartheta) = ST_X(\phi) \wedge ST_X(\vartheta), \tag{3.9}$$

$$ST_X(\langle r\rangle\phi) = \exists Y(r(X,Y) \wedge ST_Y(\phi)), \tag{3.10}$$

missä Y on sellainen muuttuja, joka ei esiinny kaavassa ϕ,

$$ST_X(\mu Y.\phi(Y)) = \forall T((\forall Z(sing(Z) \to (ST_Z(\phi(T)) \to Z \subseteq T))) \to X \subseteq T), \tag{3.11}$$

missä Z ja T ovat sellaisia muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa $\phi(X)$.

Selvästi jokaisen $L\mu$-kaavan ϕ standardikäännös $ST_X(\phi)$ on MSO-kaava.

Lause 3.14. (Vrt. [6, s. 246].) *Jokaiselle $L\mu$-kaavalle ϕ, sen standardikäännökselle $ST_X(\phi)$ ja jokaiselle pisteelle $w \in S^{\mathfrak{M}}$ pätee, että*

$$(\mathfrak{M}, w, V) \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{w\}]) \vDash ST_X(\phi).$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla lauseen ϕ pituuden suhteen. On helppo nähdä, että väite pätee standardikäännöksen kohdille 3.6-3.10. Todistetaan kohta 3.11.

Olkoot $\mathfrak{M}$, $w \in S^{\mathfrak{M}}$, V ja $\phi(Y)$ mielivaltaisia kuitenkin siten, että Y esiintyy kaavassa $\phi(Y)$ vain positiivisesti ja olkoon X jokin sellainen muuttuja, joka ei esiinny kaavassa $\phi(Y)$.

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, w, V) \vDash \mu Y.\phi(Y) \\
&\Leftrightarrow w \in \|\mu Y.\phi(Y)\|_V^{\mathfrak{M}} \\
&\Leftrightarrow \{w\} \subseteq \|\mu Y.\phi(Y)\|_V^{\mathfrak{M}} \\
&\Leftrightarrow \{w\} \subseteq \bigcap\{T \subseteq S^{\mathfrak{M}} \mid \|\phi(X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}} \subseteq T\} \\
&\Leftrightarrow \forall T \subseteq S^{\mathfrak{M}}((\|\phi(X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}} \subseteq T) \to \|X\|_{V[X:=\{w\}]}^{\mathfrak{M}} \subseteq T) \\
&\Leftrightarrow \forall T \subseteq S^{\mathfrak{M}}((\forall z \in S^{\mathfrak{M}}(z \in \|\phi(X)\|_{V[X:=T]}^{\mathfrak{M}} \to z \in T)) \to \|X\|_{V[X:=\{w\}]}^{\mathfrak{M}} \subseteq T) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{w\}]) \vDash \forall T((\forall Z(sing(Z) \to (ST_Z(\phi(T)) \to Z \subseteq T))) \\
&\quad \to X \subseteq T) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{w\}]) \vDash ST_X(\mu Y.\phi(Y))
\end{aligned}$$

Siis väite pätee standardikäännöksen kohdalle 3.11. Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikille $L\mu$-lauseille ϕ. $\square$

Huomautus 3.5. Vaikka standardikäännös tehdään teknisesti joukkomuuttujan suhteen, niin käytännössä käännös tehdään pisteen suhteen, sillä jokainen $X \in \mathbb{X}$, joka esiintyy yhteydessä ST_X on rajoitettu täsmälleen yhden alkion joukoksi, joka on olennaisesti sama asia kuin piste.

Esimerkki 3.8. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi, $s \in S^{\mathfrak{M}}$ ja V jokin valuaatio. Nyt

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, s, V) \vDash p \wedge \langle r \rangle q \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash ST_X(p \wedge \langle r \rangle q) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash ST_X(p) \wedge ST_X(\langle r \rangle q) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash p(X) \wedge (\exists Y(r(X,Y) \wedge ST_Y(q))) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash p(X) \wedge (\exists Y(r(X,Y) \wedge q(Y))) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash \exists Y(p(X) \wedge r(X,Y) \wedge q(Y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}, s, V) \vDash \mu Y.(p \vee \langle r \rangle Y) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash ST_X(\mu Y.(p \vee \langle r \rangle Y)) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash \forall T((\forall Z(sing(Z) \to (ST_Z(p \vee \langle r \rangle T) \to Z \subseteq T))) \\
&\qquad\quad \to X \subseteq T) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash \forall T((\forall Z(sing(Z) \to ((ST_Z(p) \vee ST_Z(\langle r \rangle T)) \\
&\qquad\quad \to Z \subseteq T))) \to X \subseteq T) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash \forall T((\forall Z(sing(Z) \to (p(Z) \vee (\exists U(r(Z,U) \\
&\qquad\quad \wedge ST_U(T)))) \to Z \subseteq T))) \to X \subseteq T) \\
&\quad \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{s\}]) \vDash \forall T((\forall Z(sing(Z) \to (p(Z) \vee (\exists U(r(Z,U) \\
&\qquad\quad \wedge U \subseteq T))) \to Z \subseteq T))) \to X \subseteq T)
\end{aligned}
$$

Lause 3.15. (Vrt. [6, s. 246].) *Jokainen $L\mu$-kaavamääritelty luokka transitiosysteemejä on myös MSO-kaavamääritelty.*

Todistus. Olkoon ϕ mielivaltainen $L\mu$-kaava, jossa ei esiinny muuttujaa X. Nyt $C^{L\mu}(\phi)$ on kaavan ϕ määräämä luokka transitiosysteemejä. Valitaan mielivaltainen transitiosysteemi $\mathfrak{M} \in C^{L\mu}(\phi)$. Nyt mielivaltaiselle valuaatiolle V pätee seuraavaa.

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \phi &\Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{sr^{\mathfrak{M}}\}]) \vDash ST_X(\phi) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V[X := \{sr^{\mathfrak{M}}\}]) \vDash \exists X(sr(X) \wedge ST_X(\phi)) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{M}, V) \vDash \exists X(sr(X) \wedge ST_X(\phi)).
\end{aligned}
$$

Siis $(\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}) \vDash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \exists X(sr(X) \wedge ST_X(\phi))$. Tästä seuraa, että $C^{L\mu}(\phi) = C^{MSO}(\phi')$, missä $\phi' = \exists X(sr(X) \wedge ST_X(\phi))$. $\square$

Korollaari 3.8. *Jokainen $L\mu$-kaavamääritelty luokka transitiosysteemejä on myös MSO-määritelty.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan lauseista 3.13 ja 3.15. □

Korollaari 3.9. *Jokainen $L\mu$-määritelty luokka transitiosysteemejä on myös MSO-määritelty.*

Todistus. Tulos seuraa korollaarista 3.8 ja siitä, että jokainen $L\mu$-lause on $L\mu$-kaava. □

4 Automaatit ja pelit

Määritelmä 4.1. Olkoon $U = \{p_1, \ldots, p_n\}$ äärellinen joukko propositiosymboleja. Funktiota $m : U \to \wp(T)$ kutsutaan joukon T *markkeeraukseksi.*

Määritelmä 4.2. Olkoon $U = \{p_1, \ldots, p_n\}$ äärellinen joukko propositiosymboleja. Merkinnällä $Sent(U)$ tarkoitetaan jotain joukon U alkiosta muodostettujen ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kaavojen joukkoa.

Määritelmä 4.3. Jonoa $(Q, \Sigma_P, \Sigma_R, q_I, \delta, \Omega)$, missä Q on äärellinen joukko tiloja, $g_I \in Q$, $\Sigma_P \subseteq \mathbb{P}$ äärellinen joukko yksipaikkaisia predikaattisymboleja, $\Sigma_R \subseteq \mathbb{R}$ äärellinen joukko kaksipaikkaisia relaatioita, $\delta : Q \times \wp(\Sigma_P) \to Sent(\Sigma_R \times Q)$ transitiofunktio ja $\Omega : Q \to \mathbb{N}$ funktio, kutsutaan *μ-automaatiksi.* Funktiota Ω kutsutaan pariteettifunktioksi.

Määritelmä 4.4. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja $s \in S^{\mathfrak{M}}$. Merkitään seuraavasti niiden predikaattisymboleiden $p \in \mathbb{P}$ joukkoa, jotka toteutuvat pisteessä s ja kuuluvat aakkostoon Σ_P.

$$L^{\mathfrak{M}}(s) := \{p \in \Sigma_P \mid (\mathfrak{M}, s) \vDash p\}.$$

Merkitään pisteen s kaikkien Σ_r-seuraajien joukkoa seuraavasti.

$$SCC^{\mathfrak{M}}(s) := \bigcup_{r \in \Sigma_R} scc_r^{\mathfrak{M}}(s).$$

Määritelmä 4.5. Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja A μ-automaatti. Seuraavanlaista peliä kutsutaan *μ-peliksi* ja merkitään $G(\mathfrak{M}, A)$.

- Peli aloitetaan tilanteesta $(s_0, q_0) = (sr^{\mathfrak{M}}, q_I)$.
- Jos ollaan tilanteessa (s_i, q_i) on pelaajan 0 vuoro. Pelaaja 0 valitsee markkeerauksen $m_{i+1} : \Sigma_R \times Q \to \wp(SCC^{\mathfrak{M}}(s_i))$ siten, että seuraavat ehdot pätevät.
  - Jokaisella $r \in \Sigma_R$ ja $q \in Q$ $m_{i+1}(r, q) \subseteq scc_r^{\mathfrak{M}}(s_i)$ ja
  - struktuuri $\mathfrak{N} = (SCC^{\mathfrak{M}}(s_i), \{(r, q)^{\mathfrak{N}} \mid r \in \Sigma_R, q \in Q\})$, missä $SCC^{\mathfrak{M}}(s_i)$ on struktuurin universumi ja (r, q) predikaattiosymboli, jonka tulkinta on funktion $m_{i+1}(r, q)$ määräämä joukko, toteuttaa lauseen $\delta(q_i, L^{\mathfrak{M}}(s_i))$. Toisin sanoen $\mathfrak{N} \vDash \delta(q_i, L^{\mathfrak{M}}(s_i))$.

  Oleellista on siis, että pelaaja 0 valitsee funktion m_{i+1}. Kun funktion valinta on tehty, peli on tilanteessa m_{i+1}, missä m_{i+1} on valittu markkeeraus.

- Jos ollaan tilanteessa m_i on pelaajan 1 vuoro. Pelaaja 1 valitsee jotkin $r_i \in \Sigma_R$, $q_i \in Q$ ja $s_i \in m_i(r_i, q_i)$. Seuraavaksi tilanteeksi tulee pari (s_i, q_i). Oleellista on siis, että pelaaja 1 valitsee mihin markkeerausta m_i sovelletaan ja mikä sen antamista vaihtoehdoista otetaan mukaan uuteen tilanteeseen.

- Jos pelaaja 0 (pelaaja 1), ei voi tehdä valintaa, niin pelaaja 1 (pelaaja 0) voittaa.

- Jos molemmat pelaajat voivat aina tehdä valinnan, niin peli on ääretön ja siihen liittyy ääretön jono

  $$(sr^{\mathfrak{M}}, q_I), m_1, (s_1, q_1), m_2, \dots.$$

  Olkoon $\pi = (q_I, q_1, q_2, \dots)$ tästä jonosta saatu jono pelattuja automaatin tiloja. Koska Q on äärellinen, niin laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa sellainen $q \in Q$, että se esiintyy jonossa π äärettömän usein, joten on olemassa sellainen $k \in \mathbb{N}$ joka esiintyy äärettömän usein jonossa $(\Omega(q_I), \Omega(q_1), \Omega(q_2), \dots)$. Merkinnällä $minInf(\Omega(\pi))$ tarkoitetaan pienintä lukua, joka esiintyy jonossa $(\Omega(q_I), \Omega(q_1), \Omega(q_2), \dots)$ äärettömän usein. Pelaaja 0 voittaa pelin, joss $minInf(\Omega(\pi))$ on parillinen.

Jos pelaajalla 0 on voittostrategia f_0 pelissä $G(\mathfrak{M}, A)$, niin μ-automaatti A hyväksyy transitiosysteemin $\mathfrak{M}$.

Määritelmä 4.6. Olkoon A μ-automaatti. Luokkaa

$$L(A) = \{\mathfrak{M} \mid A \text{ hyväksyy transitiosysteemin } \mathfrak{M}\}$$

kutsutaan *μ-automaatin A hyväksymäksi kieleksi.*

Määritelmä 4.7. Määritellään jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kaava

$$\mathit{diff}(x_1, \dots, x_n) := \bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j.$$

Lause 4.1. (Ks. [6, s. 249]) *Luokka C transitiosysteemejä on $L\mu$-määritelty, joss $C = L(A)$ jollain sellaisella μ-automaatilla $A = (Q, \Sigma_P, \Sigma_R, q_I, \delta, \Omega)$, jossa $Sent(\Sigma_R \times Q)$ sisältää vain disjunktioita kaavoista, jotka ovat muotoa*

$$\exists x_1, \dots, x_m (\bigwedge_{1 \le i \le m} p_{k_i}(x_i) \wedge \forall y \bigvee_{1 \le i \le m} p_{k_i}(y)),$$

missä $p_{k_i} \in \Sigma_R \times Q$, kun $1 \le i \le m$.

Todistus. Lause on uudelleenmuotoilu Janinin ja Walukiewiczin artikkelin [4] tuloksesta. □

Lause 4.2. (Ks. [6, s. 249]) *Luokka C transitiosysteemejä on $L\mu$-kaavamääritelty, joss pätee, että $C = L(A)$ jollain sellaisella μ-automaatilla $A = (Q, \Sigma_P, \Sigma_R, q_I, \delta, \Omega)$, jossa $Sent(\Sigma_R \times Q)$ sisältää vain disjuktioita kaavoista, jotka ovat muotoa*

$$\exists x_1, \ldots, x_m(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} p_{k_i}(x_i) \land \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq m} \chi(y)),$$

missä $p_{k_i} \in \Sigma_R \times Q$, kun $1 \leq i \leq m$ ja $\chi(y)$ on muotoa p(y) olevien kaavojen konjunktioiden disjuktio, missä $p \in \Sigma_R \times Q$.

Todistus. Tulos seuraa Walukiewiczin artikkelista [9]. $\square$

Lause 4.3. (Ks. [6, s. 249]) *Luokka C transitiopuita on MSO-määritelty, joss $C = L(A)$ jollain sellaisella μ-automaatilla $A = (Q, \Sigma_P, \Sigma_R, q_I, \delta, \Omega)$, jossa $Sent(\Sigma_R \times Q)$ sisältää vain disjuktioita kaavoista, jotka ovat muotoa*

$$\begin{aligned} \exists x_1, \ldots, x_m(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} p_{k_i}(x_i) \land \mathit{diff}(x_1, \ldots, x_m) \\ \land \forall y(\mathit{diff}(y, x_1, \ldots, x_m) \to \chi(y))), \end{aligned} \tag{4.1}$$

missä $p_{k_i} \in \Sigma_R \times Q$, kun $1 \leq i \leq m$ ja $\chi(y)$ on muotoa $p(y)$ olevien kaavojen konjunktioiden disjuktio, missä $p \in \Sigma_R \times Q$.

Todistus. Tulos seuraa Walukiewiczin artikkelista [9]. Yksityiskohtaisempi todistus löytyy artikkelista [1, s.293-297]. $\square$

5 Ilmaisuvoimien vastaavuus

Määritelmä 5.1. Olkoon ϑ jokin muotoa

$$\begin{aligned} &\exists x_1, \ldots, x_m(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} p_{k_i}(x_i) \wedge \mathit{diff}(x_1, \ldots, x_m) \\ &\qquad \wedge \forall y(\mathit{diff}(y, x_1, \ldots, x_m) \to \chi(y))) \end{aligned} \tag{5.1}$$

oleva kaava. Merkinnällä ϑ^* tarkoitetaan kaavaa, joka saadaan korvaamalla kaikki kaavan *diff* esiintymät loogisella vakiolla $\top$ kaavassa ϑ. Siis ϑ^* on muotoa

$$\exists x_1, \ldots, x_m(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} p_{k_i}(x_i) \wedge \forall y(\chi(y))). \tag{5.2}$$

Jos $\theta = \vartheta_1 \vee \cdots \vee \vartheta_n$, missä ϑ_i on kuten ϑ kaikilla i, niin $\theta^* = \vartheta_1^* \vee \cdots \vee \vartheta_n^*$.

Määritelmä 5.2. Olkoon ϕ MSO-lause ja C sen määräämä luokka transitiopuita. Lauseen 4.3 perusteella on olemassa sellainen μ-automaatti $A = (Q, \Sigma_P, \Sigma_R, q_I, \delta, \Omega)$, jossa $Sent(\Sigma_R \times Q)$ sisältää vain kaavan 4.1 muotoa olevien lauseiden disjuktioita, että $C = L(A)$. Muodostetaan tästä automaatista A uusi automaatti A^* korvaamalla transitiofunktio δ transitiofunktiolla δ^* siten, että kaikilla $q \in Q$ ja $P \subseteq \Sigma_P$ $\delta^*(q, P) = (\delta(q, P))^*$, missä * on määritelmässä 5.1 määritelty funktio.

Lause 5.1. *Olkoon $\mathfrak{M}$ transitiosysteemi ja olkoot A ja A^* määritelmässä 5.2 mainittuja automaatteja. Automaatti A^* hyväksyy transitiosysteemin $\mathfrak{M}$, joss automaatti A hyväksyy sen ω-laajennuksen $\widehat{\mathfrak{M}}$.*

Todistus. (Ks. [6, s. 253] ja vrt. [5, s. 273].) Olkoot $G^*(\mathfrak{M}, A^*)$ ja $G(\widehat{\mathfrak{M}}, A)$ pareja $(\mathfrak{M}, A^*)$ ja $(\widehat{\mathfrak{M}}, A)$ vastaavat μ-pelit. Käytetään peleistä lyhennysmerkintöjä G^* ja G.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että automaatti A^* hyväksyy transitiosysteemin $\mathfrak{M}$. Siis pelaajalla 0 on voittostrategia f_0^* pelissä G^*. Rakennetaan induktiivisesti, pelaajalle 0 voittostrategia f_0 peliin G. Tehdään tämä pelaamalla pelejä G ja G^* yhtäaikaa. Ideana on siirtää pelaajan 1 siirto pelistä G peliin G^* ja siirtää voittostrategian f_0^* ehdottama pelaajan 0 siirto takaisin peliin G.

Molemmat pelit alkavat tilanteesta $(sr^{\mathfrak{M}}, q_I)$; itseasiassa G alkaa tilanteesta $(sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}, q_I)$, mutta kuten hyvin tiedetään on $sr^{\mathfrak{M}} = sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}$. Tehdään induktio-oletus, että peleissä G ja G^* molemmat pelaajat ovat tehneet n siirtoa siten, että alla mainitut ehdot 1, 2 ja 3 pitävät paikkaansa. Olkoon

$$(sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}, q_I), m_1, (u_1, q_1), \ldots, m_n(u_n, q_n)$$

tähän asti pelattu peli G ja

$$(sr^{\mathfrak{M}}, q_I), m_1^*, (s_1, q_1), \ldots, m_n^*(s_n, q_n)$$

tähän asti pelattu peli G^*. Pelin säännöistä seuraa, että u_{i+1} on jokin pisteen u_i r_{i+1} seuraaja jollain $r_{i+1} \in \Sigma_R$, joten $u_{i+1} = u_i(a_{i+1}, r_{i+1}, s_{i+1})$, kun $i \leq n$, missä $a_{i+1} \in \mathbb{N}$ ja $s_{i+1} \in S^{\mathfrak{M}}$. Vastaavasti piste s_{i+1} on jokin pisteen s_i r_{i+1} seuraaja jollain $r_{i+1} \in \Sigma_R$.

1. Markkeeraus m_i^* on valittu voittostrategian f_0^* mukaisesti, kun $i \leq n$.
2. Pelissä G pelattu piste u_i on pelissä G^* pelatun pisteen s_i ω-polku, kun $i \leq n$.
3. Voittostrategian f_0^* ehdottama markkeeraus m_i^* pelissä G^* on siirretty peliin G markkeerauksena m_i alla mainitulla tavalla, kun $i \leq n$.

Olkoon $m_{n+1}^* : \Sigma_R \times Q \to \wp(SCC^{\mathfrak{M}}(s_n))$ voittostrategian f_0^* ehdottama markkeeraus tilanteessa (s_n, q_n) pelissä G^*. Määritellään peliin G markkeerauksen m_{n+1}^* avulla markkeeraus $m_{n+1} : \Sigma_R \times Q \to \wp(SCC^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n))$ seuraavasti:

$$m_{n+1}(r, q) := \bigcup_{a \in \mathbb{N}} \{u_n(a, r, t) \mid t \in m_{n+1}^*(r, q)\}. \tag{5.3}$$

Erityisesti saadaan, että

$$m_{n+1}^*(r, q) \neq \emptyset \Leftrightarrow m_{n+1}(r, q) \neq \emptyset. \tag{5.4}$$

Määritelmästä 2.16 seuraa, että $m_{n+1}(r, q) \subseteq scc_r^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)$. Induktio-oletuksen ehdosta 2 ja määritelmästä 2.16 seuraa, että kaikilla $p \in \mathbb{P}$

$$s_n \in p^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow u_n \in p^{\widehat{\mathfrak{M}}}. \tag{5.5}$$

Jälkimmäisestä seuraa suoraan, että pisteet s_n ja u_n toteuttavat samat propositiosymbolit $p \in \Sigma_P$ eli $L^{\mathfrak{M}}(s_n) = L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)$ (ks. määritelmä 4.4). Edelleen tästä ja määritelmästä 5.2 saadaan, että

$$\delta^*(q_n, L^{\mathfrak{M}}(s_n)) = (\delta(q_n, L^{\mathfrak{M}}(s_n)))^* = (\delta(q_n, L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)))^*. \tag{5.6}$$

Koska markkeeraus m_{n+1}^* valittiin voittostrategian perusteella, niin on se laillinen valinta. Määritelmän 4.5 perusteella struktuurille

$$\mathfrak{N} = (SCC^{\mathfrak{M}}(s_n), \{(r, q)^{\mathfrak{N}} \mid r \in \Sigma_R, q \in Q\})$$

pätee, että

$$\mathfrak{N} \models \delta^*(q_n, L^{\mathfrak{M}}(s_n)). \tag{5.7}$$

Vastaavasti, jotta edellä määritelty markkeeraus m_{n+1} olisi laillinen siirto pelissä G täytyy struktuurille

$$\widehat{\mathfrak{N}} = (SCC^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n), \{(r, q)^{\widehat{\mathfrak{N}}} \mid r \in \Sigma_R, q \in Q\})$$

päteä, että

$$\widehat{\mathfrak{N}} \models \delta(q_n, L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)). \tag{5.8}$$

Osoitetaan, että näin on.

Olkoon ϑ^* jokin disjunktion $\delta^*(q_n, L^{\mathfrak{M}}(s_n))$ sellainen muotoa 5.2 oleva disjunkti, että $\mathfrak{N} \models \vartheta^*$. Todistetaan, että tällöin $\widehat{\mathfrak{N}} \models \vartheta$, missä ϑ on muotoa 5.1 oleva lause, josta saadaan ϑ^* kun siihen sovelletaan määritemässä 5.1 määriteltyä *-funktiota. Seurauksena ω-indeksoinnista jokaista joukon $(r,q)^{\mathfrak{N}}$ alkiota vastaa äärettömän monta joukon $(r,q)^{\widehat{\mathfrak{N}}}$ alkiota, toisin sanoen jos $s \in (r,q)^{\mathfrak{N}}$, niin $u'_i = u_n(i,r,s) \in (r,q)^{\widehat{\mathfrak{N}}}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tästä johtuen lauseessa ϑ esiintyvien muuttujien $x_1, \ldots, x_m$ tulkinnat voidaan valita aina pareittain erillisiksi mallissa $\widehat{\mathfrak{N}}$. Siis koska

$$\mathfrak{N} \models \exists x_1, \ldots, x_m(\bigwedge_{1 \le i \le m} p_{k_i}(x_i)),$$

niin

$$\widehat{\mathfrak{N}} \models \exists x_1, \ldots, x_m(\bigwedge_{1 \le i \le m} p_{k_i}(x_i) \wedge \mathit{diff}(x_1, \ldots, x_m)).$$

Valitaan mielivaltainen piste $v = u_n(a,r,t) \in SCC^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)$. Koska u_n on pisteen s_n ω-polku, niin määritelmistä 2.15 ja 2.16 seuraa, että t on pisteen s_n r-seuraaja transitiosysteemissä $\mathfrak{M}$, joten $t \in SCC^{\mathfrak{M}}(s_n)$. Edelleen kaavoista 5.2 ja 5.7 seuraa, että $\mathfrak{N} \models \chi(t)$, siis malli $\mathfrak{N}$ toteuttaa sopivat kaavassa $\chi(t)$ esiintyvät predikaatit (r,q), eli $\widehat{\mathfrak{N}} \models (r,q)(t)$. Siis jokaisella edellä mainitulla predikaatilla pätee, että $t \in (r,q)^{\mathfrak{N}}$, joten kaavasta 5.3 seuraa, että $v \in (r,q)^{\widehat{\mathfrak{N}}}$ jokaisella edellä mainitulla predikaatilla (r,q). Tästä seuraa, että $\widehat{\mathfrak{N}} \models (r,q)(v)$ jokaisella edellä mainitulla predikaatilla (r,q), joten $\widehat{\mathfrak{N}} \models \chi(v)$. Koska v oli valittu mielivaltaisesti, niin $\widehat{\mathfrak{N}} \models \forall y(\chi(y))$, joten erityisesti $\widehat{\mathfrak{N}} \models \forall y(\mathit{diff}(y, x_1, \ldots, x_m) \rightarrow \chi(y))$. Siis $\widehat{\mathfrak{N}} \models \vartheta$, joten $\widehat{\mathfrak{N}} \models \delta(q_n, L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n))$.

Tästä seuraa, että markkeeraus m_{n+1} on laillinen siirto pelaajalle 0 pelissä G, joten siirto lisätään voittostrategiaan f_0. Nyt pelaaja 1 valitsee jotkin alkiot $r_{n+1} \in \Sigma_R$, $q_{n+i} \in Q$ ja $u_{n+1} = u_n(a, r_{n+1}, t) \in m_{n+1}(r_{n+1}, q_{n+1})$. Uudeksi tilanteeksi tulee pari (u_{n+1}, q_{n+1}) pelissä G. Siirretään pelaajan 1 siirto peliin G^* siten, että uudeksi tilanteeksi pelissä G^* tulee (s_{n+1}, q_{n+1}), missä $s_{n+1} = t$ ja q_{n+1} kuten edellä. Induktioperiaatteen nojalla jokainen pelissä G pelattu piste u_i on vastaavan pelissä G^* pelatun pisteen s_i $\omega-polku$.

Koska f_0^* on pelaajan 0 voittostrategia pelissä G^*, niin pelaaja 0 voi aina tehdä valinnan. Tästä seuraa induktioperiaatteen nojalla, että pelaaja 0 voi aina tehdä valinnan pelissä G. Selvää on myöskin se, että jos pelaaja 1 ei voi tehdä valintaa pelissä G^*, niin hän ei voi tehdä valintaa vastaavassa tilanteessa pelissä G. Joten, jos peli G on äärellinen, niin se päättyy siihen, että pelaaja 1 ei voi tehdä valintaa, jolloin pelaaja 0 voittaa pelissä G. Oletetaan sitten, että peli G on ääretön ja jono

$$(sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}, q_I), m_1, (u_1, q_1), \ldots, m_n(u_n, q_n), \ldots$$

vastaa pelin G siirtoja. Tällöin yhtäaikaa pelattu peli G^* on myöskin ääretön, ja sen siirtoja vastaa jono

$$(sr^{\mathfrak{M}}, q_I), m_1^*, (s_1, q_1), \ldots, m_n^*(s_n, q_n), \ldots.$$

Molemmissa peleissa pelataan vastaavissa tilanteissa aina samoissa automaatin tiloissa. Olkoon $\pi = (q_I, q_1, q_2, \ldots)$ jono näissä peleissä pelattuja tiloja. Koska peliä G^* on pelattu voittostrategian f_0^* mukaan, niin pelaaja 0 voittaa, joten pienin kokonaisluku joka esiintyy jonossa $(\Omega(q_I), \Omega(q_1), \Omega(q_2), \ldots)$ äärettömän usein on parillinen. Koska pariteettifunktio on molemmissa automaateissa sama, niin pelissä G $minInf(\Omega(\pi))$ on sama kuin pelissä G^*. Erityisesti se on myös parillinen, joten pelaaja 0 voittaa myöskin pelissä G. Siis f_0 on voittostrategia pelissä G. Tästä seuraa, että A hyväksyy transitiosysteemin $\widehat{\mathfrak{M}}$.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että automaatti A hyväksyy transitiosysteemin $\widehat{\mathfrak{M}}$. Siis pelaajalla 0 on voittostrategia f_0 pelissä G. Rakennetaan kuten edellä pelaajalle 0 voittostrategia f_0^* peliin G^*, pelaamalla pelejä G ja G^* samanaikaisesti. Aivan kuten edellä molemmat pelit alkavat tilanteesta $(sr^{\mathfrak{M}}, q_I)$. Tehdään induktio-oletus, että peleissä G ja G^* molemmat pelaajat ovat tehneet n siirtoa siten, että alla mainitut ehdot 1, 2 ja 3 pätevät. Olkoon

$$(sr^{\mathfrak{M}}, q_I), m_1^*, (s_1, q_1), \ldots, m_n^*(s_n, q_n)$$

tähän asti pelattu peli G^* ja olkoon

$$(sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}, q_I), m_1, (u_1, q_1), \ldots, m_n(u_n, q_n)$$

tähän asti pelattu peli G.

1. Pelaaja 0 on valinnut markkeeraukset m_i pelissä G voittostrategian f_0 mukaisesti, kun $i \leq n$.

2. Pelin G tilanteet (u_i, q_i) on valittu siten, että u_i on pelin G^* tilanteessa (s_i, q_i) esiintyvän pisteen s_i ω-polku, kun $i \leq n$.

3. Pelissä G^* pelatut markkeeraukset m_i^* on valittu alla mainitulla tavalla voittostrategian f_0 ehdottaman markkeerauksen m_i perusteella, kun $i \leq n$.

Olkoon $m_{n+1} : \Sigma_R \times Q \rightarrow \wp(SCC^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n))$ voittostrategian f_0 ehdottama markkeeraus tilanteessa (u_n, q_n) pelissä G. Määritellään vastaava markkeeraus $m_{n+1}^* : \Sigma_R \times Q \rightarrow \wp(SCC^{\mathfrak{M}}(s_n))$ voittostrategiaan f_0^* tilanteessa (s_n, q_n) pelissä G^* markkeeraauksen m_{n+1} avulla. Olkoon

$$m_{n+1}^*(r, q) = \{t \in S^{\mathfrak{M}} \mid \exists a \in \mathbb{N}(u_n(a, r, t) \in m_{n+1}(r, q))\}.$$

Todistetaan, että näin valittu markkeeraus on laillinen siirto pelaajalle 0 pelissä G^*. Koska u_n on pisteen s_n ω-polku, niin määritelmistä 2.15 ja 2.16 seuraa, että $m^*_{n+1}(r,q) \subseteq scc^{\mathfrak{M}}_r(s_n)$. Markkeeraus m_{n+1} on valittu voittostrategian f_0 mukaisesti, joten se on laillinen siirto pelissä G. Siis

$$\widehat{\mathfrak{N}} \vDash \delta(q_n, L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)). \tag{5.9}$$

Määritelmien 2.16 ja 4.4 perusteella tiedetään, että $L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n) = L^{\mathfrak{M}}(s_n)$. Tästä ja määritelmästä 5.2 saadaan, että

$$(\delta(q_n, L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)))^* = (\delta(q_n, L^{\mathfrak{M}}(s_n)))^* = \delta^*(q_n, L^{\mathfrak{M}}(s_n)). \tag{5.10}$$

Olkoon ϑ jokin sellainen muotoa 5.1 oleva lauseen $\delta(q_n, L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n))$ disjunkti, että $\widehat{\mathfrak{N}} \vDash \vartheta$. Todistetaan, että tällöin $\mathfrak{N} \vDash \vartheta^*$, josta seuraa että $\mathfrak{N} \vDash (\delta(q_n, L^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)))^*$ ja kaavan 5.10 perusteella, että $\mathfrak{N} \vDash \delta^*(q_n, L^{\mathfrak{M}}(s_n))$.

Jokainen lauseessa ϑ esiintyvä predikaatti on muotoa (r,q), missä $r \in \Sigma_R$ ja $q \in Q$. Olkoon $\{p_{k_i} \mid 1 \leq i \leq m\}$ kaikkien lauseessa ϑ esiityvien predikaattien joukko. Nyt $p_{k_i} = (r'_i, q'_i)$, jollain $r'_i \in \Sigma_R$ ja $q'_i \in Q$, kun $1 \leq i \leq m$. Koska ϑ on muotoa 5.1, niin

$$\widehat{\mathfrak{N}} \vDash \exists x_1, \ldots, x_m \bigwedge_{1 \leq i \leq m} p_{k_i}(x_i). \tag{5.11}$$

Erityisesti tästä seuraa, että $\widehat{\mathfrak{N}} \vDash \exists x_i(p_{k_i}(x_i))$, kun $i \leq m$. Valitaan mielivaltainen $i \in \{1, \ldots, m\}$. Nyt on olemassa sellainen $v_i \in SCC^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)$, että $v_i \in (r'_i, q'_i)^{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Edelleen tiedetään, että $(r'_i, q'_i)^{\widehat{\mathfrak{N}}} = m_{n+1}(r'_i, q'_i) \subseteq scc^{\widehat{\mathfrak{M}}}_{r'_i}(u_n)$, joten v_i on jokin pisteen u_n r'_i seuraaja, eli $v_i = u_n(a, r'_i, t)$, jollain $a \in \mathbb{N}$, $t \in S^{\mathfrak{M}}$. Markkeerauksen m^*_{n+1} valinnan perusteella $t \in m^*_{n+1}(r'_i, q'_i)$. Koska u_n on pisteen s_n ω-polku, niin edellisestä ja määritelmästä 2.15 seuraa, että $t \in scc^{\mathfrak{M}}_{r'_i}(s_n) \subseteq SCC^{\mathfrak{M}}(s_n)$. Tästä seuraa, että $\mathfrak{N} \vDash \exists x_i(p_{k_i}(x_i))$. Koska $i \in \{1, \ldots, m\}$ valittiin mielivaltaisesti, niin $\mathfrak{N} \vDash \exists x_i(p_{k_i}(x_i))$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, m\}$, joten

$$\mathfrak{N} \vDash \exists x_1, \ldots, x_m \bigwedge_{1 \leq i \leq m} p_{k_i}(x_i).$$

Koska $\widehat{\mathfrak{N}} \vDash \vartheta$, niin on olemassa sellaiset $c_1, \ldots, c_m \in SCC^{\widehat{\mathfrak{M}}}(u_n)$, että

$$\widehat{\mathfrak{N}} \vDash \bigwedge_{1 \leq i \leq m} p_{k_i}(c_i) \wedge \mathit{diff}(y, c_1, \ldots, c_m) \text{ ja} \tag{5.12}$$

$$\widehat{\mathfrak{N}} \vDash \forall y(\mathit{diff}(y, c_1, \ldots, c_m) \to \chi(y)).$$

Valitaan mielivaltainen $t \in SCC^{\mathfrak{M}}(s_n)$. Tällöin $t \in scc^{\mathfrak{M}}_r(s_n)$ jollain $r \in \Sigma_R$. Nyt ω-laajennuksen seurauksena struktuurissa $\widehat{\mathfrak{M}}$ on äärettömän monta alkion u_n r seuraajaa jokaista struktuurin $\mathfrak{M}$ alkion s_n r-seuraajaa kohden. Erityisesti voidaan valita sellainen $b \in \mathbb{N}$, että $v = u_n(b, r, t)$ ja $\widehat{\mathfrak{N}} \vDash$

diff$(v, c_1, \ldots, c_m)$, sillä kaavasta 5.12 nähdään, että $\widehat{\mathfrak{N}} \models$ *diff*$(c_1, \ldots, c_m)$. Tästä seuraa, että $\widehat{\mathfrak{N}} \models \chi(v)$. Määritelmänsä perusteella $\chi(v)$ muotoa (r, q) olevien propositioiden konjunktioiden disjunktio. Olkoon $p_{v_1} \wedge \cdots \wedge p_{v_l}$ jokin sellainen lauseen χ disjunkti, että $\widehat{\mathfrak{N}} \models p_{v_1}(v) \wedge \cdots \wedge p_{v_l}(v)$. Siis

$$v \in p_{v_i}^{\widehat{\mathfrak{N}}} = (r_{v_i}, q_{v_i})^{\widehat{\mathfrak{N}}} = m_{n+1}(r_{v_i}, q_{v_i})$$

jokaisella $i \in \{1, \ldots, l\}$. Nyt markkeerauksen m^*_{n+1} valinnasta seuraa, että

$$t \in m^*_{n+1}(r_{v_i}, q_{v_i}) = (r_{v_i}, q_{v_i})^{\mathfrak{N}} = p_{v_i}^{\mathfrak{N}},$$

jokaisella $i \in \{1, \ldots, l\}$, joten $\mathfrak{N} \models p_{v_1}(t) \wedge \cdots \wedge p_{v_l}(t)$ ja edelleen $\mathfrak{N} \models \chi(t)$. Koska pisteen t valinta tehtiin mielivaltaisesti, niin $\mathfrak{N} \models \forall y(\chi(y))$.

Edellisten perusteella saadaan, että

$$\mathfrak{N} \models \exists x_1, \ldots, x_m(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} p_{k_i}(x_i) \wedge \forall y(\chi(y))),$$

siis $\mathfrak{N} \models \vartheta^*$. Tästä seuraa, kuten edellä jo mainittiin, että $\mathfrak{N} \models \delta^*(q_n, L^{\mathfrak{M}}(s_n))$. Siis markkeeraus m^*_{n+1} on laillinen siirto pelaajalle 0 pelissä G^*, joten lisätään se muodostettavaan voittostrategiaan f_0^*. Nyt

$$(sr^{\mathfrak{M}}, q_I), m^*_1, (s_1, q_1), \ldots, m^*_n(s_n, q_n), m^*_{n+1}$$

on tähän asti pelattu peli G^* ja

$$(sr^{\widehat{\mathfrak{M}}}, q_I), m_1, (u_1, q_1), \ldots, m_n(u_n, q_n), m_{n+1}$$

tätä vastaava osa voittostrategian f_0 mukaista peliä G. Nyt pelaaja 1 valitsee jotkin alkiot $r_{n+1} \in \Sigma_R$, $q_{n+1} \in \mathrm{Q}$ ja $s_{n+1} \in m^*_{n+1}(r_{n+1}, q_{n+1})$ pelissä G^*. Parista (s_{n+1}, q_{n+1}) tulee uusi tilanne peliin G^*. Markkeerauksen m^*_{n+1} valinnasta seuraa, että on olemassa sellainen $a \in \mathbb{N}$, että $u_n(a, r_{n+1}, s_{n+1}) \in m_{n+1}(r_{n+1}, q_{n+1})$. Olkoon a_{n+1} jokin tälläinen a. Merkitään, että $u_{n+1} = u_n(a_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1})$. Nyt pari (u_{n+1}, q_{n+1}) on laillinen valinta pelaajalle 1 pelissä G. Pelaaja 1 tekee tämän valinnan. Näin toimittaessa edellä tehdyt oletukset pitävät edelleen paikkansa ja induktioperiaatteen nojalla, aina kun pelaaja 0 voi tehdä siirron pelissä G voi se tehdä vastaavassa tilanteessa siirron myös pelissä G^*. Koska peliä G pelataan voittostrategian f_0 mukaan, niin pelaaja 0 voi aina tehdä siirron pelissä G, joten pelaaja 0 voi aina tehdä siirron myös pelissä G^*. Siis pelaaja 0 ei voi hävitä peliä G^* äärellisellä määrällä siirtoja. Kuten edellisen suunnan todistuksessa todettiin, niin peleissä G ja G^* pelataan vastaavissa tilanteissa aina samassa automaatin tilassa ja koska pariteettifunktiot ovat automaateissa samat ja koska peliä G pelataan pelaajan 0 voittostrategian mukaan niin äärettömässä pelissä G, aivan kuten pelissä G^*, $minInf(\Omega(\pi))$ on parillinen. Tästä seuraa, että pelaaja 0 voittaa pelissä G^* ja edelleen, että näin muodostettu strategia f_0^* on voittostrategia pelaajalle 0 pelissä G^*. Tästä seuraa, että A^* hyväksyy transitiosysteemin $\mathfrak{M}$.

Siis automaatti A^* hyväksyy transitiosysteemin $\mathfrak{M}$, joss automaatti A hyväksyy sen ω-laajennuksen $\widehat{\mathfrak{M}}$. $\square$

Määritelmä 5.3. Kaavaa ϕ sanotaan *bisimilaari-invariantiksi*, jos sen määräämä luokka transitiosysteemejä $C(\phi)$ on suljettu bisimulaation suhteen.

Lause 5.2. *Olkoon ϕ mielivaltainen bisimilaari-invariantti MSO-lause. On olemassa sellainen $L\mu$-kaava $\widehat{\phi}$, että jokaiselle transitiosysteemille $\mathfrak{M}$ pätee, että*

$$\widehat{\mathfrak{M}} \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}) \vDash \widehat{\phi}.$$

Todistus. (Vrt. [6, s. 252-253] ja [5, s. 273].) Olkoon $C = C^{MSO}(\phi)$, $C_t = \{\mathfrak{M} \in C \mid \mathfrak{M} \text{ on transitiopuu}\}$ ja $C_\omega = \{\widehat{\mathfrak{M}} \mid \mathfrak{M} \in C\}$. Siis C_ω on kaikkien luokan C transitiosysteeminen ω-laajennusten joukko. Jokainen ω-laajennus on transitiopuu, C on bisimulaation suhteen suljettu luokka transitiosysteemejä ja lauseen 2.3 perusteella jokainen transitiosysteemi on bisimilaarinen ω-laajennuksensa kanssa, joten $C_\omega \subseteq C_t \subseteq C$. Lauseen 4.3 perusteella on olemassa sellainen lauseessa 4.3 mainittu μ-automaatti A, että $L(A) = C_t$. Lauseen 5.1 perusteella automaatin A perusteella tehty automaatti A^* hyväksyy transitiosysteemin $\mathfrak{M}$, joss automaatti A hyväksyy sen ω-laajennuksen $\widehat{\mathfrak{M}}$. Siis

$$\mathfrak{M} \in L(A^*) \Leftrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \in L(A).$$

Automaatti A^* on lauseessa 4.2 mainittua muotoa, joten

$$L(A^*) = \{\mathfrak{M} \mid (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \widehat{\phi}, \text{ kaikilla valuaatioilla } V\},$$

jollain $L\mu$-kaavalla $\widehat{\phi}$.

Valitaan mielivaltainen transitiosysteemi $\mathfrak{M}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{M}} \vDash \phi &\Leftrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \in C_\omega \\
&\Leftrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \in C_t \\
&\Leftrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \in L(A) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \in L(A^*) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \widehat{\phi}, \text{ kaikilla valuaatioilla } V.
\end{aligned}$$

Siis $\widehat{\mathfrak{M}} \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}, V) \vDash \widehat{\phi}$, kaikilla valuaatioilla V. $\square$

Lause 5.3. *Olkoon C bisimulaation suhteen suljettu luokka transitiosysteemejä. Luokka C on MSO-määritelty, joss se on L_μ-kaavamääritelty.*

Todistus. Korollaarista 3.8 seuraa suoraan, että jokainen $L\mu$-kaavamääritelty luokka transitiosysteemejä on myös MSO-määritelty.

Todistetaan vielä, että jos luokka C on MSO-määritelty, niin se on myös $L\mu$-kaavamääritelty. Olkoon ϕ MSO-lause, joka määrittelee luokan C. Valitaan mielivaltainen transitiosysteemi $\mathfrak{M}$. Lauseesta 2.3 seuraa, että $\mathfrak{M}$ on bisimilaarinen ω-laajennuksensa $\widehat{\mathfrak{M}}$ kanssa. Koska C on bisimilaarisesti suljettu, niin

$$\mathfrak{M} \in C \Leftrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \in C,$$

mistä seuraa, että

$$\mathfrak{M} \vDash \phi \Leftrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \vDash \phi.$$

Lauseen 5.2 perusteella on olemassa sellainen $L\mu$-kaava $\widehat{\phi}$, että

$$\widehat{\mathfrak{M}} \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}) \vDash \widehat{\phi}.$$

Siis

$$\mathfrak{M} \vDash \phi \Leftrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \vDash \phi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, sr^{\mathfrak{M}}) \vDash \widehat{\phi}.$$

Siis $\mathfrak{M} \in C^{L\mu}(\widehat{\phi}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \in C^{MSO}(\phi)$, joten $C^{L\mu}(\widehat{\phi}) = C^{MSO}(\phi) = C$. Siis C on $L\mu$-kaavamääritelty.

On siis todistettu, että luokka transitiosysteemejä on MSO-määritelty, joss se on $L\mu$-kaavamääritelty. □

6 Johtopäätökset

Korollaarin 3.9 ja lauseen 5.3 perusteella nähdään selvä yhteys $L\mu$-määriteltävyyden ja MSO-määriteltävyyden välillä. Lause 3.11 sanoo, että jokainen $L\mu$-määritelty luokka transitiosysteemejä on bisimulaation suhteen suljettu ja korollaarin 3.9 perusteella myös MSO-määritelty. Lauseesta 5.3 seuraa taas, että bisimulaation suhteen suljettu luokka transitiosysteemejä on MSO-määritelty, joss se on $L\mu$-kaavamääritelty. Herääkin kysymys, että onko olemassa bisimulaation suhteen suljettua $L\mu$-kaavamääriteltyä luokkaa transitiosysteemejä, joka ei olisi $L\mu$-määritelty. Siis pitääkö paikkaansa, että bisimulaation suhteen suljettu luokka transitiosysteemejä on MSO-määritelty, joss se on $L\mu$-määritelty. Walukiewicz ja Janin vastaavat ensimmäiseen kysymykseen ei ja jälkimmäiseen kyllä. Artikkelissaan [5] he todistavat nimenomaan, että bisimulaation suhteen suljettu luokka transitiosysteemejä on MSO-määritelty, joss se on $L\mu$-määritelty. Tosin artikkelissa ei eksplisiittisesti todisteta bisimulaation suhteen suljetun $L\mu$-kaavamääritellyn luokan ja $L\mu$-määritellyn luokan vastaavuutta. Artikkelien [5] ja [6] todistuksissa ilmeisesti käytetään implisiittisesti oletusta, että bisimilaari-invarianttia $L\mu$-kaavaa vastaa ekvivalentti $L\mu$-lause.

Mikä on siis $L\mu$-lauseen ja bisimilaari-invariantin $L\mu$-kaavan ero, vai onko sitä lainkaan. Korollaarin 3.5 perusteella tiedetään, että monotonista kaavaa vastaa ekvivalentti $L\mu$-lause. Lauseesta 3.5 seuraa, että jokainen positiivinen kaava on monotoninen ja korollaarista 3.7 puolestaan seuraa, että kaavaa, jossa ei ole vapaata muuttujaa, joka esiintyy sekä positiivisesti että negatiivisesti, vastaa ekvivalentti $L\mu$-lause.

Oletetaan, että Walukiewicz ja Janin ovat oikeassa eli, että bisimulaation suhteen suljettu luokka transitiosysteemejä on MSO-määritelty, joss se on $L\mu$-määritelty. Tämän oletuksen perusteella voidaan todistaa mielenkiintoinen yhteys bisimulaation ja $L\mu$-lauseiden välillä.

Lause 6.1. *Olkoon ϕ $L\mu$-kaava. Nyt $C^{L\mu}(\phi)$ on bisimulaation suhteen suljettu, joss on olemassa $L\mu$-lause ϑ, joka on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa.*

Todistus. ($\Leftarrow$) Oletetaan, että on olemassa kaavan ϕ kanssa ekvivalentti $L\mu$-lause ϑ. Koska ϕ ja ϑ ovat ekvivalentteja, niin $C^{L\mu}(\phi) = C^{L\mu}(\vartheta)$. Lauseen 3.11 perusteella $C^{L\mu}(\vartheta)$ on bisimulaation suhteen suljettu, joten myös $C^{L\mu}(\phi)$ on bisimulaation suhteen suljettu, mikä olikin todistettava.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että $C^{L\mu}(\phi)$ on bisimulaation suhteen suljettu luokka transitiosysteemejä. Lauseen 3.15 perusteella $C^{L\mu}(\phi) = C^{MSO}(\phi')$, missä $\phi' = \exists X(sr(X) \wedge ST_X(\phi))$. Lauseen 3.13 perusteella on olemassa sellainen MSO-lause ϕ^*, että $C^{MSO}(\phi') = C^{MSO}(\phi^*)$, erityisesti $C^{MSO}(\phi') = C^{MSO}(\forall X_0 \ldots \forall X_n(\phi'))$, missä $X_0, \ldots, X_n$ ovat kaikki kaavassa ϕ' esiintyvät vapaat muuttujat. Koska $C^{L\mu}(\phi) = C^{MSO}(\phi') = C^{MSO}(\phi^*)$ ja $C^{L\mu}(\phi)$ on bisimulaation suhteen suljettu, niin myös $C^{MSO}(\phi^*)$ on bisimulaation suhteen suljettu. Oletuksen perusteella bisimulaation suhteen suljettu luokka transitiosysteemejä on MSO-määritelty, joss se on $L\mu$-määritelty, siis $C^{MSO}(\phi^*)$ on $L\mu$-määritelty eli $C^{L\mu}(\phi)$ on $L\mu$-määritelty. Tästä seuraa, että on olemassa sellainen $L\mu$-lause $\widehat{\phi}$, joka on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa, josta väite seuraa.

Siis $C^{L\mu}(\phi)$ on bisimulaation suhteen suljettu, joss on olemassa $L\mu$-lause ϑ, joka on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa. □

Korollaari 6.1. *Olkoon ϕ $L\mu$-kaava. Nyt ϕ on bisimilaari-invariantti, joss on olemassa monotoninen $L\mu$-kaava ϑ, joka on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa.*

Todistus. ($\Rightarrow$) Oletetaan, että ϕ on bisimilaari-invariantti $L\mu$-kaava. Lauseen 6.1 perusteella on olemassa $L\mu$-lause, joka on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa. Jokainen lause on monotoninen, josta väite seuraa.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että on olemassa monotoninen $L\mu$-kaava ϑ, joka on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa. Korollaarin 3.5 perusteella $L\mu$-lause, joka saadaan korvaamalla jokainen kaavassa ϑ esiintyvä muuttuja loogisella vakiolla $\perp$ on ekvivalentti kaavan ϑ kanssa, joten se on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa. Väite seuraa lauseesta 6.1. □

Korollaari 6.2. *Olkoon ϕ $L\mu$-kaava. Nyt ϕ on bisimilaari-invariantti, joss on olemassa sellainen positiivinen $L\mu$-kaava ϑ, joka on ekvivalentti kaavan ϕ kanssa.*

Todistus. Väite seuraa lauseista 3.5 ja 6.1 ja korollaarista 6.1. □

μ-kalkyyli vaikuttaa varsin mielenkiintoiselta logiikalta. Se on ilmaisuvoimaltaan vahva ja sitä on peliteoreettisesta näkökulmasta katsoen verrattain helppo ymmärtää. Vaikka μ-kalkyyli ilmaisuvoimaltaan häviääkin monadiselle toisen kertaluvun predikaattilogiikalle, on se laskennallisesti tehokkaampi. Laskennallinen tehokkuus ja suuri ilmaisuvoima onkin syynä sille, miksi μ-kalkyyli on mielenkiintoinen tietojenkäsittelytieteen näkökulmasta. Kun rajoitutaan tutkimaan ainoastaan bisimulaation suhteen suljettuja ominaisuuksia, μ-kalkyyli on yhtä ilmaisuvoimainen kuin MSO. Moniin tarkoituksiin μ-kalkyyli onkin hyvä kompromissi ilmaisuvoiman ja laskennallisen tehokkuuden välillä.

Viitteet

[1] D. Berwanger, A. Blumensath. *The Monadic Theory of Tree-like Structures*. Lecture Notes in Computer Science numero 2500, Automata Logics, and Infinite Games: A Guide to Current Research, s. 285 - 301. Springer Berliini / Heidelberg, 2002.

[2] J. Bradfield, C. Stirling. *Modal μ-calculi*. Studies in Logic and Practical Reasoning vol. 3: Handbook of Modal Logic, s. 721 - 756. Amsterdam, Elsevier, 2007.

[3] C. Fritz. *Some Fixed Point Basics*. Lecture Notes in Computer Science numero 2500, Automata Logics, and Infinite Games: A Guide to Current Research, s. 359 - 364. Springer Berliini / Heidelberg, 2002.

[4] D. Janin, I. Walukiewicz. *Automata for the μ-calculus and related results*. Lecture Notes in Computer Science numero 969, Mathematical Foundations of Computer Science 1995, s. 552-562. Springer Berliini / Heidelberg.

[5] D. Janin, I. Walukiewicz. *On the Expressive Completeness of the Propositional mu-Calculus with Respect to Monadic Second Order Logic*. Lecture Notes in Computer Science numero 1119, CONCUR '96: Concurrency Theory, s. 263 - 277. Springer Berliini / Heidelberg, 1996.

[6] P. Rohde. *Expressive Power of Monadic Second-Order Logic and Modal μ-Calculus*. Lecture Notes in Computer Science numero 2500, Automata Logics, and Infinite Games: A Guide to Current Research, s. 239 - 257. Springer Berliini / Heidelberg, 2002.

[7] Y. Venema. *Lectures on the modal μ-calculus (2006)*. Luentomoniste [http://staff.science.uva.nl/~yde/teaching/ml/] 6.11.2007. Institute for Logic, Language and Computation, Amsterdamin yliopisto, 2006.

[8] Y. Venema. *Lectures on the modal μ-calculus (2007)*. Luentomoniste [http://staff.science.uva.nl/~yde/teaching/ml/] 6.11.2007. Institute for Logic, Language and Computation, Amsterdamin yliopisto, 2007.

[9] I. Walukiewicz. *Monadic second order logic on tree-like structures*. Lecture Notes in Computer Science numero 1046, STACS '96, s. 399-413. Springer Berliini / Heidelberg, 1996.