

---

TAMPEREEN YLIOPISTO  
Pro gradu -tutkielma

---

Essi Kuukkula

# Epäeuklidisista geometrioista

---

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matematiikka  
Elokuu 2010

---



Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KUUKKULA, ESSI: Epäeuklidisista geometrioista

Pro gradu -tutkielma, 57 s.

Matematiikka

Elokuu 2010

---

## Tiivistelmä

Kreikkalainen matemaatikko Eukleides Aleksandrialainen loi noin 300 eKr. euklidisen geometrian, joka perustuu hänen teoksessaan *Alkeet* julkaisemiin aksioomiin, perusoletuksiin. Eukleideen viides aksiooma, yhdensuuntaisuusaksiooma, alkoi askarruttaa matemaatikkoja. Sen mukaan *pisteen, joka ei ole annetulla suoralla, kautta voidaan piirtää ainoastaan yksi suora, joka on yhdensuuntainen annetun suoran kanssa*. Noin 2000 vuotta Eukleideen jälkeen keksittiin useiden matemaatikkojen toimesta sellaisia geometrioita, jotka eivät noudattaneet Eukleideen yhdensuuntaisuusaksioomaa. Tällöin syntyi epäeuklidinen geometria, joka on geometria, jossa ei päde yhdensuuntaisuusaksiooma. Tästä johtuen epäeuklidisissa geometrioissa on monia Eukleideen tasogeometriasta poikkeavia ominaisuuksia. Epäeuklidisia geometrioita on useita. Tässä tutkielmassa tarkastellaan niistä tarkemmin pallogeometriaa ja hyperbolista geometriaa.

Pallogeometria on geometriaa pallon pinnalla. Siinä taso on pallon pinta, pisteet pallon pinnan pisteitä ja suorat pallon isoympyröitä. Pallogeometria ei noudata Eukleideen yhdensuuntaisuusaksioomaa, sillä siinä ei ole ollenkaan yhdensuuntaisia suoria. Pallogeometriassa kolmion kulmien summa on suurempi kuin  $180^\circ$ . Hyperbolisessa geometriassa oletetaan Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooman sijasta hyperbolinen yhdensuuntaisuusaksiooma. Sen mukaan suoralla on vähintään kaksi suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkevaa yhdensuuntaista suoraa. Hyperbolisessa geometriassa kolmion kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ . Hyperbolisen geometrian malleja ovat Kleinin–Beltramin kiekko, Poincarén kiekko sekä Poincarén puolitaso.



# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Epäeuklidisen geometrian historiaa</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Valmistelevia tarkasteluja</b>	<b>11</b>
3.1	Kahden ja kolmen tason väliset kulmat . . . . .	11
3.2	Eukleideen tasogeometriaa . . . . .	11
3.3	Kompleksiluvun määritelmä . . . . .	12
3.4	Yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuskuvaukset . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Pallogeometria</b>	<b>14</b>
4.1	Pallo ja isoympyrä . . . . .	14
4.2	Pallokolmio . . . . .	16
4.3	Napakolmio . . . . .	20
4.4	Pallokolmioiden yhtenevyys . . . . .	24
4.5	Pallokolmion pinta-ala . . . . .	28
4.6	Elliptinen geometria . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Hyperbolinen geometria</b>	<b>31</b>
5.1	Neutraali geometria . . . . .	31
5.2	Hyperbolisen geometrian ominaisuudet . . . . .	36
5.3	Kleinin–Beltramin kiekko . . . . .	39
5.4	Poincarén kiekko . . . . .	40
5.5	Etäisyys . . . . .	42
5.6	Yhtenevät kolmiot . . . . .	45
5.7	Poincarén puolitaso . . . . .	46
5.8	Pystysuorat viivat . . . . .	46
5.9	Yhtenevyyskuvaus . . . . .	48
5.10	Inversio . . . . .	50
	<b>Viitteet</b>	<b>57</b>



# 1 Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma käsittelee epäeuklidisia geometrioita. Ne ovat geometrioita, joissa ei päde Eukleideen yhdensuuntaisuusaksioma. Aksioman mukaan suoralla on yksikäsitteinen suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkeva yhdensuuntainen suora. Epäeuklidisista geometrioista käsitellään erityisesti pallogeometriaa, jossa ei ole ollenkaan yhdensuuntaisia suoria ja hyperbolista geometriaa, jossa on useita yhdensuuntaisia suoria.

Tutkielman päälähteenä on Allan Berelen ja Jerry Goldmanin teos *Geometry: Theorems and Constructions* [2]. Tutkielma noudattelee teoksen lukuja 14 ja 15. Lisäksi tutkielman kappaleen 5 loppuosassa on käytetty lähteenä Arthur Baragarin teosta *A Survey of Classical and Modern Geometries* [1]. Tutkielman alaluvut 5.7–5.10 noudattavat Baragarin teoksen alalukuja 7.1–7.4.

Tutkielman luvussa 2 kerrotaan epäeuklidisen geometrian historiasta ja esitellään Eukleideen aksiomat, joihin euklidinen geometria perustuu. Historiakatsauksessa on lähdeoteoksena käytetty Carl Boyerin teoksia *Tieteiden kuningatar I ja II* [3] ja [4]. Luvussa 3 esitetään joitakin tuloksia ja määritelmiä, joita tarvitaan seuraavissa kappaleissa. Luvussa ei esitetä lauseiden todistuksia, vaan lukija voi halutessaan tarkastaa ne viitteiden osoittamista lähdeoteoksista. Lukijalta edellytetään geometrian perustietoja, esimerkiksi vastaavia tietoja kuin kursseilla Aksiomaattinen ja Deskriptiivinen geometria.

Tutkielman luvussa 4 tarkastellaan pallogeometriaa. Pallogeometria on geometriaa pallon pinnalla ja siinä ei ole ollenkaan yhdensuuntaisia suoria. Luvun alussa annetaan pallogeometrian määritelmiä ja tarkastellaan sen ominaisuuksia. Seuraavaksi määritellään pallokolmio ja napakolmio. Alaluvussa 4.3 esitetään lause, jonka mukaan pallogeometriassa kolmion kulmien summa on enemmän kuin  $180^\circ$ . Sen jälkeen määritellään pallokolmioiden yhtenevyys ja symmetria sekä esitetään pallogeometrian yhtenevyyslauseet. Kappaleen lopussa tarkastellaan vielä pallokolmion pinta-alaa, esitetään siihen liittyen palloylimäärän käsite ja lopuksi kerrotaan lyhyesti myös elliptisestä geometriasta.

Tutkielman luvussa 5 tarkastellaan hyperbolista geometriaa. Luku aloitetaan tarkastelemalla neutraalia geometriaa, jonka ominaisuudet pätevät myös hyperbolisessa geometriassa. Sen jälkeen siirytään tarkastelemaan hyperbolisen geometrian ominaisuuksia ja annetaan hyperbolinen yhdensuuntaisuusaksioma. Sen mukaan suoralla on vähintään kaksi suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkevaa suoraa. Lisäksi esitetään lause, jonka mukaan hyperbolisessa geometriassa kolmion kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ . Kappaleissa 5.3 ja 5.4 esitellään kaksi hyperbolisen geometrian mallia, Kleinin–Beltramin kiekko ja Poincarén kiekko. Ne helpottavat hyperbolisen geometrian hahmottamista. Seuraavaksi esitetään hyperbolisen geometrian

etäisyyden käsite ja annetaan esimerkkejä siitä. Tämän jälkeen määritellään hyperbolisten kolmioiden yhtenevyys ja esitetään hyperbolisen geometrian yhtenevyyslause (kkk). Kappaleen lopussa tutkitaan vielä kolmatta hyperbolisen geometrian mallia, Poincarén puolitasoa, ja siihen liittyen yhtenevyyskuvauksia ja inversiota eli ympyräpeilausta.

## 2 Epäeuklidisen geometrian historiaa

Geometrian juuret ovat aina muinaisten babylonialaisten ja egyptiläisten tutkimuksissa, mutta Antiikin Kreikassa geometria kehittyi itsenäiseksi tieteenksi. Kreikkalainen matemaatikko Eukleides Aleksandrialainen (noin 300 eKr.) [3, s. 155] on merkittävin geometrian historian henkilöistä. Hän loi euklidisen geometrian, joka on edelleenkin geometrian opetuksen perustana. Teoksessaan *Alkeet* (kreikaksi *Stokheia*, latinaksi *Elementa*) [6] Eukleides kokosi yhteen geometrian senaikaiset tiedot. Teoksen lähtökohtana on joukko geometrian aksioomia, perusoletuksia, jotka hyväksyttiin tosiksi ilman perusteita.

**Aksiooma 1.** *Kahden pisteen kautta voidaan piirtää suora.*

**Aksiooma 2.** *Jana voidaan jatkaa suoraksi.*

**Aksiooma 3.** *Annetun pisteen ja annetun janan avulla voidaan piirtää ympyrä.*

**Aksiooma 4.** *Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.*

**Aksiooma 5** (Yhdensuuntaisuusaksiooma). *Jos kahta suoraa leikkaavan suoran leikkauskulmat suorien kanssa ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, nämä kaksi suoraa leikkaavat toisensa sillä puolella, jolla kulmat ovat vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa.*

Eukleideen asettamat ensimmäinen ja toinen aksiooma eivät alkuperäisessä muodossaan takaa kahden pisteen kautta kulkevan suoran yksikäsitteisyyttä eivätkä ääretöntä pituutta. Todistuksissaan Eukleides kuitenkin käytti näitä ominaisuuksia vapaasti. Onkin otettava huomioon, että aksioomat on kirjoitettu senaikaisen matematiikan täsmällisyydellä ja nämä matematiikan täsmällisyyden kriteerit ovat ajan kuluessa tiukentuneet. Myöhemmin nämä aksioomat onkin korjattu täsmällisempiin, yleisesti käytettyihin muotoihin: *Kahden pisteen kautta voidaan piirtää yksikäsitteinen suora ja Jana voidaan jatkaa äärettömäksi.*

Eukleideen viidettä aksioomaa kutsutaan yhdensuuntaisuusaksioomaksi eli paralleeliaksioomaksi. Se muuttui myöhemmin yhtäpitävään, yksinkertaisempaan muotoon: *Pisteen, joka ei ole annetulla suoralla, kautta voidaan*



*piirtää ainoastaan yksi suora, joka on yhdensuuntainen annetun suoran kanssa.* Suorien yhdensuuntaisuus tarkoittaa sitä, että niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä. Yhdensuuntaisuusaksiomalla on myös monia muita yhtäpitäviä seurauksia.

Viisi Eukleideen aksiomaa määrittää euklidisen tasogeometrian. Euklidisessa tasogeometriassa siis pätee kaikki Eukleideen viisi aksiomaa. Euklidinen geometria tunnetaan nykyään tavallisena tason tai avaruuden geometriana.

Matemaatikot eivät kuitenkaan hyväksyneet aksiomia ilman kritiikkiä. Erityisesti yhdensuuntaisuusaksioman riippumattomuus rupesi epäilyttämään joitakin matemaatikkoja, ja sitä yritettiin todistaa useiden toimesta. Aikaisimpina heistä mainittakoon Ptolemaios (noin 100 jKr.) [3, s. 242] ja Proklos (410–485) [3, s. 277]. Jopa Eukleides itse oli tyytymätön yhdensuuntaisuusaksiomaan ja vältti parhaansa mukaan sen käyttämistä. Yhdensuuntaisuusaksioma askarrutti matemaatikkoja lähes 2000 vuoden ajan. 1700-luvulla omia todistusyrityksiään tekivät italialainen Girolamo Saccheri (1667–1733) [4, s. 615], sveitsiläinen Johann Lambert (1728–77) [4, s. 649] ja saksalainen Adrien Legendre (1752–1833) [5, s. 19].

Vasta 1800-luvulla päästiin tulokseen, ettei yhdensuuntaisuusaksiomaa voida todistaa muiden aksiomien avulla. Yksi aikansa merkittävimmistä matemaatikoista, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) [4, s. 696], tutki Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiomaa ja tuli siihen tulokseen, ettei sitä voi todistaa. Hän kuitenkin pelkäsi julkaista näitä tuloksia ja piti tiedot itsellään. Samoihin aikoihin myös venäläinen Nikolai Ivanovits Lobatsevski (1792–1856) [4, s. 727] ja unkarilainen János Bolyai (1802–60) [4, s. 727] tutkivat omilla tahoillaan toisistaan tietämättä yhdensuuntaisuusaksiomaa.

Lobatsevski toimi Venäjällä Kazanin yliopiston rehtorina. Hän vakuuttui vuosien 1826 ja 1829 välillä siitä, ettei Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiomaa voida todistaa neljän ensimmäisen aksioman avulla. Vuonna 1829 hän julkaisi artikkelin ”Geometrian perusteista”, joka sisälsi yhdensuuntaisuusaksioman kanssa ristiriidassa olevan geometrian mallin. Tässä geometriassa oli siis suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkevia alkuperäisen suoran kanssa yhdensuuntaisia suoria useampia kuin yksi. Hän itse kutsui geometriaansa ”imaginaariseksi geometriaksi”, sillä se oli terveen järjen vastainen, vaikka muodostikin tasapainoisen geometrisen rakenteen. Julkaisullaan hänestä tuli ensimmäinen matemaatikko, joka keksi epäeuklidisen geometrian ja häntä onkin hauska kutsuttu ”geometrian Kopernikukseksi”. Geometriaa sanotaan epäeuklidiseksi geometriaksi, jos siinä ei päde yhdensuuntaisuusaksioma. Lobatsevskin tulokset jäivät kuitenkin pitkäksi aikaa tietämättömyyteen suurimmaksi osaksi siksi, että hän julkaisi ne venäjäksi ja kaukana senaikaisista matematiikan keskuksista. Hänen tuloksensa julkaistiin saksaksi vasta vuonna 1840.

Samaan aikaan Unkarissa János Bolyai, Gaussin opiskelutoverin poika, tutki yhdensuuntaisuusaksiomaa. Hänen isänsä Farkas Bolyai kielsi häntä

tuhlaamasta aikaansa siihen, sillä isä oli yrittänyt todistaa sitä suurimman osan elämästään, mutta ei ollut onnistunut. János ei uskonut isäänsä, vaan jatkoi tutkimistaan. Vuoden 1829 aikoihin hän tuli samoihin johtopäätöksiin kuin Lobatsevski. János Bolyai kehitti opin, joka alkaa oletuksesta, että annetun pisteen kautta kulkee äärettömän monta annetun suoran kanssa yhdensuuntaista suoraa. Hänen isänsä julkaisi tutkimuksen oman kirjansa liitteenä ja lähetti sen Gaussille luettavaksi. Gauss ei ottanut kantaa teokseen. Hän itse oli ajatellut samoin jo usean vuoden ajan. Jos hän olisi kehunut työtä, olisi hän siten kehunut myös itseään. Gaussin suhtautuminen työhön ja Lobatsevskin tulosten ilmestyminen saksan kielellä masensivat János Bolyain niin, ettei hän enää koskaan julkaissut tuloksiaan.

Gaussin oppilas, Bernhard Riemann (1826–1866) [4, s. 763], esitti dosen-tin väitöskirjassaan vuonna 1854 syvän ja laajan katsauksen geometriaan. Tämä liitti geometrian perusteellisesti matematiikkaan, sen oltua hiljaiselossa parinkymmenen vuoden ajan epäeuklidisen geometrian keksimisen jälkeen. Riemann kehitti epäeuklidiseen geometriaan uudenlaisen näkökulman. Tämä perustui malliin, jossa taso tulkitaan pallon pinnaksi ja suorat pallon isoympyröiksi. Tällöin kaikki suorat leikkaavat toisensa, joten yhdensuuntaisia suoria ei ole olemassa. Näin ollen mallissa ei päde Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma. Tässä mallissa kolmion kulmien summa oli enemmän kuin  $180^\circ$ . Myöhemmin Riemannin luomaa mallia ruvettiin kutsumaan elliptiseksi geometriaksi tai pallogeometriaksi.

Lehtisen [8] mukaan epäeuklidisen geometrian voidaan katsoa vapauttaneen geometrian. Sen ansiosta tuli mahdolliseksi rakentaa erilaisiin aksioomajärjestelmiin nojautuvia geometrioita, ja kysymys reaali maailmassa valitsevasta geometriasta siirtyi fysiikan puolelle.

Epäeuklidisen geometrian keksimisen jälkeen sen kehitykseen ovat vahvimmin vaikuttaneet Eugenio Beltrami (1835–1900) [4, s. 650], Felix Klein (1849–1925) [4, s. 767] ja Henri Poincaré (1854–1912) [4, s. 835]. Heistä Beltrami kehitti ensimmäisenä mallin Lobatsevskin ja Bolyain kehittämälle geometrialle, pseudopallon. Klein tutki epäeuklidista geometriaa laajasti ja otti muun muassa käyttöön nimet ”elliptinen geometria” Riemannin kehittämästä geometriasta ja ”hyperbolinen geometria” Lobatsevskin ja Bolyain kehittämästä geometriasta. Hän myös viimeisteli Beltramin aloittaman mallin hyperbolisesta geometriasta ja tutki etäisyyden käsitettä hyperbolisessa geometriassa. Myös Poincaré kehitti monipuolisen matemaattisen uransa aikana omat mallinsa hyperbolisesta geometriasta.

David Hilbert (1862–1943) [4, s. 844] julkaisi vuonna 1899 teoksen *Geometrian perusteet* (saksaksi *Grundlagen der Geometrie*), jossa hän esittää geometrian täsmällisen aksioomajärjestelmän. Järjestelmä perustuu Eukleideen aksioomiin, mutta on paljon laajempi ja pyrkii täyttämään Eukleideen aksioomajärjestelmän aukkoja ja korjaamaan sen virheitä. Tämä Hilbertin aksioomajärjestelmä onkin nykyään yleisesti korvannut Eukleideen aksioomajärjestelmän, ja euklidinen geometria esitetään yleensä nimenomaan Hil-

bertin aksioomajärjestelmän mukaisesti.

### 3 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa esitetään joukko määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan tutkielman seuraavissa luvuissa. Lauseiden todistuksia ei esitetä, vaan lukija voi halutessaan katsoa ne viitteiden osoittamista lähdeteoksista.

#### 3.1 Kahden ja kolmen tason väliset kulmat

**Määritelmä 3.1.** (Vrt. [2, s. 157-158]). Olkoot  $P$  ja  $Q$  tasoja, jotka leikkaavat toisensa suoralla  $l$ . Tasot  $P$  ja  $Q$  muodostavat *kahden tason välisen kulman*. Olkoon  $A$  piste suoralla  $l$ . Olkoon  $B$  sellainen tason  $P$  piste, että suora  $AB$  on kohtisuorassa suoraa  $l$  vasten. Vastaavasti olkoon  $C$  sellainen tason  $Q$  piste, että suora  $AC$  on kohtisuorassa suoraa  $l$  vasten. *Kahden tason  $P$  ja  $Q$  välinen kulma* on suorien  $AB$  ja  $AC$  välinen kulma. Merkitään kahden tason välistä kulmaa  $\angle BAC$ .

Kahden tason välisen kulman muodostavia tasoja sanotaan kulman tahkoiksi ja tasojen leikkaussuoraa kulman särmäksi.

**Määritelmä 3.2.** (vrt. [2, s. 163]) Olkoot  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  tasoja, jotka kaikki leikkaavat toisensa pisteessä  $A$ . Tasot muodostavat *kolmen tason välisen kulman*, jonka kärki on piste  $A$ . Olkoon  $B_1$  piste tasojen  $P$  ja  $Q$  leikkaussuoralla  $b_1$ , olkoon  $B_2$  piste tasojen  $Q$  ja  $R$  leikkaussuoralla  $b_2$  ja olkoon  $B_3$  piste tasojen  $P$  ja  $R$  leikkaussuoralla  $b_3$ . Merkitään kolmen tason  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  välistä kulmaa  $\angle AB_1B_2B_3$ . Merkinnäessä ensimmäisenä tulee kärkipiste ja sen jälkeen särmien pisteet.

Pistettä  $A$  sanotaan kolmen tason välisen kulman kärjeksi, puolisuoria  $AB_1$ ,  $AB_2$  ja  $AB_3$  kulman särmiksi ja kulmia  $\angle B_1AB_2$ ,  $\angle B_2AB_3$  ja  $\angle B_3AB_1$  tahkokulmiksi. Kolmen tason välinen kulma sisältää kolme kahden tason välistä kulmaa.

#### 3.2 Eukleideen tasogeometriaa

**Aksiooma** (Arkhimedeen aksiooma). (Vrt. [9, s. 109]). *Jos  $a$  ja  $b$  ovat janoja, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku, että  $na > b$ .*

**Määritelmä 3.3.** Nelikulmio on *konvekssi*, jos mitkä tahansa sen kaksi pistettä voidaan yhdistää kokonaisuudessaan nelikulmion sisään jäävällä janalla.

**Lause 3.1.** *Olkoon  $\Gamma$  ympyrä ja olkoon jana  $AB$  sen halkaisija. Olkoon  $C$  sellainen ympyrän  $\Gamma$  piste, että  $A \neq C \neq B$ . Tällöin  $\angle ACB$  on suora kulma.*

*Todistus.* Sivuuutetaan. Katso esimerkiksi [9, s. 40]. □

**Lause 3.2** (Kehäkulmalause). *Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Täten samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtenevät.*

*Todistus.* Sivuuutetaan. Katso esimerkiksi [9, s. 43]. □

### 3.3 Kompleksiluvun määritelmä

**Määritelmä 3.4.** (Vrt. [7, s. 8]). *Kompleksiluvut* ovat muotoa

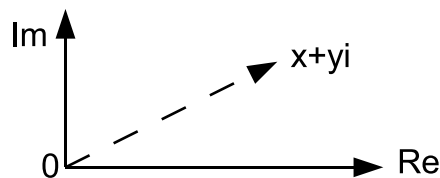
$$z = x + yi,$$

missä  $x, y \in \mathbb{R}$  ja  $i$  on *imaginaariyksikkö*, jolle on voimassa  $i^2 = -1$ . Kompleksilukujen joukkoa merkitään symbolilla  $\mathbb{C}$ . Siis

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Kaikki reaaliluvut ovat kompleksilukuja, sillä mikä tahansa reaaliluku  $x \in \mathbb{R}$  voidaan esittää kompleksilukuna  $x + 0i$ . Kompleksiluvun  $z = x + yi$  määräävää reaalilukua  $x$  kutsutaan kompleksiluvun  $z$  reaaliosaksi ja puolestaan reaalilukua  $y$  kutsutaan kompleksiluvun  $z$  imaginaariosaksi.

Kompleksilukujen havainnollistamiseen tarvitaan kaksi ulottuvuutta. Taso, jossa kompleksiluvut esitetään, sanotaan kompleksitasoksi. Siinä vaak akselina on reaaliakseli ja sitä vastaan kohtisuorassa pystyakselina on imaginaariakseli. Kompleksilukua  $z = x + yi$  vastaa kompleksitason piste  $(x, y)$  (ks. kuva 3.1).



Kuva 3.1: Kompleksiluvun esitys kompleksitasossa.

### 3.4 Yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuskuvaukset

**Määritelmä 3.5.** (Vrt. [9, s. 85]). Merkitään Eukleideen tasoa kirjaimella  $\varepsilon$ . Kuvaus  $f : \varepsilon \rightarrow \varepsilon$  on *yhtenevyyskuvaus*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot.

( $I_1$ ) Kaikille janoille on  $AB \cong f(A)f(B)$ .

( $I_2$ ) Kaikille kulmille on  $\angle BAC \cong \angle f(B)f(A)f(C)$ .

Määritelmästä seuraa, että jos  $f$  on yhtenevyyskuvaus, niin kaikille kolmioille  $\triangle ABC$  on  $\triangle ABC \cong \triangle f(B)f(A)f(C)$ . Yhtenevyyskuvausta sanotaan myös *isometriaksi*. Yhtenevyyskuvauksen lajeja ovat siirto, peilaus ja kierto. Määritellään ne seuraavaksi

**Määritelmä 3.6.** (Vrt. [9, s. 89]). Olkoon  $AB$  jana. Jos piste  $P$  ei ole suoralla  $l = AB$ , niin on olemassa täsmälleen yksi sellainen piste  $P'$ , että nelikulmio  $ABP'P$  on suunnikas. Jos taas piste  $P$  on suoralla  $l$ , niin on olemassa täsmälleen yksi sellainen suoralla  $l$  piste  $P'$ , että janat  $PP' \cong AB$  ja puolisuorista  $PP'$  ja  $AB$  toinen sisältyy toiseen. Määritellään tason  $\varepsilon$  kuvaus  $f$  asettamalla  $f(P) = P'$  ja sanotaan, että  $f$  on *siirto* janan  $AB$  verran.

**Määritelmä 3.7.** (Vrt. [9, s. 89]). Olkoon  $l$  suora. Jos piste  $P$  ei ole sillä, niin suoralla  $l$  on täsmälleen yksi sellainen piste  $Q$ , että puolisuora  $QP$  on kohtisuorassa suoraa  $l$  vastaan. Edelleen puolisuoran  $QP$  vastakkaisella puolisuoralla on täsmälleen yksi sellainen piste  $P'$ , että  $QP' \cong QP$ . Määritellään tason  $\varepsilon$  kuvaus  $f$  asettamalla  $f(P) = P'$ , jos piste  $P$  ei ole suoralla  $l$ , muussa tapauksessa  $f(P) = P$ . Sanotaan, että  $f$  on *peilaus* suoralla  $l$  yli.

**Määritelmä 3.8.** (Vrt. [9, s. 90-91]). Olkoon  $\alpha$  kulma ja  $O$  piste. Jos piste  $P \neq O$ , niin on olemassa täsmälleen yksi sellainen piste  $P'$ , että  $OP' \cong OP$  ja  $\angle POP' \cong \alpha$ . Tason  $\varepsilon$  kuvaus  $f$ , jolle  $f(P) = P'$  ja  $f(O) = O$  on *kierto* pisteen  $O$  ympäri kulman  $\alpha$  verran.

Kierto voidaan ilmaista myös matriisin avulla. Tällöin matriisi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

välittää *kierron* origon ympäri kulman  $\theta$  verran. (Vrt. [10, s. 130-131]).

**Määritelmä 3.9.** (Vrt. [9, s. 99]). Kuvaus  $f : \varepsilon \rightarrow \varepsilon$  on *yhdenmuotoisuuskuvaus*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot.

$$(S_1) \quad \text{Kaikille janoille } AB \text{ ja } CD \text{ on } \frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{f(C)f(D)}{CD}.$$

$$(S_2) \quad \text{Kaikille kulmille on } \angle BAC \cong \angle f(B)f(A)f(C).$$

Suhde  $k = \frac{f(A)f(B)}{AB}$  on yhdenmuotoisuuskuvauksen *mittakaava*. Yhtenevyyskuvaus on sellainen yhdenmuotoisuuskuvaus, jonka mittakaava on 1. Yhdenmuotoisuuskuvausta sanotaan myös *similariteetiksi*. Määritelmästä seuraa, että jos  $f$  on yhdenmuotoisuuskuvaus, niin kaikille kolmioille  $\triangle ABC$  on  $\triangle ABC \sim \triangle f(B)f(A)f(C)$ . Kaikki ympyrät ovat yhdenmuotoisia toistensa kanssa. Määritellään seuraavaksi yksi yhdenmuotoisuuskuvaus, homotetia.

**Määritelmä 3.10.** (Vrt. [9, s. 85]). Olkoon  $O$  piste ja  $k$  positiivinen mittaluku. Määritellään tason  $\varepsilon$  kuvaus  $f_h$  seuraavasti. Jos  $P \neq O$ , niin puolisuoralla  $OP$  on täsmälleen yksi sellainen piste  $P'$ , että  $OP' \cong kOP$  eli  $\frac{OP'}{OP} = k$ . Lisäksi määritellään, että  $f_h(O) = O$ . Sanotaan, että  $f_h$  on *homotetia*, jonka (*homotetia*)*keskus* on  $O$  ja (*homotetia*)*suhde* on  $k$ .

## 4 Pallogeometria

### 4.1 Pallo ja isoympyrä

Pallo on aina ollut kiinnostava geometrinen kappale, jo pelkästään sen takia, että maapallomme on pallon muotoinen. Matemaatikoille se on ollut kiinnostava myös siksi, että se tarjoaa pohjan geometrian mallille, joka kaataa Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooman. Sen mukaan annetulle suoralle on olemassa yksi ja vain yksi annetun pisteen kautta kulkeva yhdensuuntainen suora. Tässä kappaleessa tullaan huomaamaan, että sanojen piste ja suora tulkinnasta tasolla, joka on pallon pinta, saadaan geometrian malli, joka on epäeuklidinen. Tämä tarkoittaa sitä, että pallogeometria noudattaa suurinta osaa Eukleideen aksioomista, mutta ei yhdensuuntaisuusaksioomaa. Lähde-tään liikkeelle pallon määritelmästä.

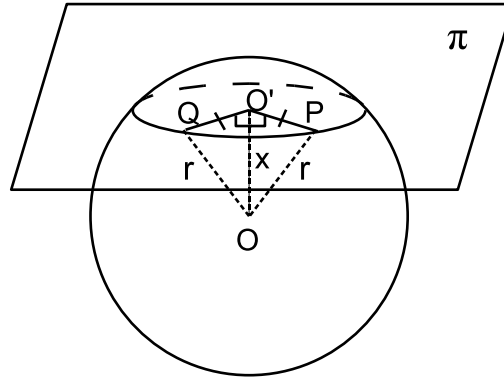
**Määritelmä 4.1.** *Pallo on niiden avaruuden pisteiden joukko, joiden etäisyys kiinteästä pisteestä on sama. Tätä kiinteää pistettä sanotaan pallon keskipisteeksi ja merkitään kirjaimella  $O$ . Etäisyyttä keskipisteestä pallon kehälle sanotaan säteeksi ja sitä merkitään kirjaimella  $r$ .*

Pallon halkaisija on jana, joka yhdistää kaksi pallon kuoren pistettä ja kulkee pallon keskipisteen kautta. Sen pituus on kaksi kertaa säteen pituus. Pallo on yksikäsitteisesti määritelty, kun sen keskipiste ja säteen pituus on annettu. Ensimmäisen lauseen avulla voidaan muodostaa pallosta ympyröitä.

**Lause 4.1.** *Olkoon pallon keskipiste  $O$  ja säde  $r$ . Olkoon  $\pi$  sellainen taso, että se leikkaa pallon ja sen etäisyys keskipisteestä on  $x$ . Siis  $0 \leq x < r$ . Tällöin tason ja pallon leikkaus on ympyrä, jonka säde on  $\sqrt{r^2 - x^2}$ .*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 191]). Olkoon piste  $O'$  pallon keskipisteen  $O$  projektio tasolle  $\pi$  (ks. kuva 4.1). Olkoot  $P$  ja  $Q$  mitkä tahansa pisteet pallon ja tason  $\pi$  leikkauksella. Nyt  $OP = OQ = r$ , sillä  $P$  ja  $Q$  ovat pallon pisteitä. Tason  $\pi$  normaali  $OO'$  on kohtisuorassa suoraa  $O'P$  ja  $O'Q$  vastaan, koska  $P$  ja  $Q$  ovat tason  $\pi$  pisteitä. Nyt kolmioiden yhtenevyyslauseen (ssk) perusteella  $\triangle OO'P \cong \triangle OO'Q$ , joten  $O'P = O'Q$ . Siis minkä tahansa tason ja pallon leikkauksella olevan pisteen etäisyys pisteestä  $O'$  on sama. Täten leikkaus on ympyrä, jonka keskipiste on  $O'$  ja säde on  $O'Q$ . Koska  $OO' = x$  ja  $OQ = r$ , kolmiosta  $\triangle OO'Q$  saadaan Pythagoraan lauseen perusteella yhtälö  $r^2 = x^2 + (O'Q)^2$ . Tästä ratkaisemalla saadaan ympyrän säteen  $O'Q$  pituudeksi  $\sqrt{r^2 - x^2}$ .  $\square$

**Määritelmä 4.2.** *Pallon keskipisteen kautta kulkevan tason ja pallon leikkaus on ympyrä, jota sanotaan *isoympyräksi*. Isoympyrällä on sama säde kuin pallolla. Isoympyrän halkaisijan päätepisteitä sanotaan toistensa *antipodeiksi*.*

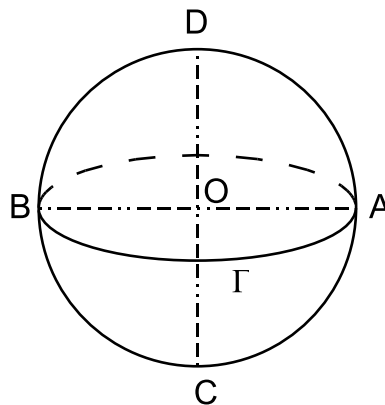


Kuva 4.1: Tason ja pallon leikkaus.

Asetetaan lauseessa 4.1  $x = 0$ . Tällöin saadaan isoympyrä ja sen säde on  $\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2} = r$ . Isoympyrä on suurin ympyrä, joka pallon pinnalle voidaan piirtää. Muita tason ja ympyrän leikkauksesta muodostuvia ympyröitä sanotaan pikkuympyröiksi.

**Esimerkki 4.1.** Maapallon pituuspiirit ja päiväntasaaja ovat isoympyröitä. Pikkuympyröitä ovat muun muassa napapiiri ja Kauriin kääntöpiiri.

**Määritelmä 4.3.** Olkoon  $\pi$  taso, jonka leikkaus pallon kanssa muodostaa ympyrän  $\Gamma$ . Pallon halkaisijaa, joka on kohtisuorassa ympyrän  $\Gamma$  muodostavaa tasoa  $\pi$  vasten ja leikkaa ympyrän sen keskipisteessä, sanotaan ympyrän *akseliksi*. Akselin päätepisteitä sanotaan ympyrän *navoiksi*.



Kuva 4.2: Pallon isoympyrä ja sen navat.

Kuvassa 4.2  $\Gamma$  on pallon isoympyrä, jana  $AB$  on sekä pallon, että isoympyrän  $\Gamma$  halkaisija ja pisteet  $A$  ja  $B$  ovat toistensa antipodit. Isoympyrän  $\Gamma$

akseli on jana  $CD$  ja navat pisteet  $C$  ja  $D$ . Isoympyrän akseli leikkaa isoympyrän sen keskipisteessä, joka on myös pallon keskipiste. Täten isoympyrän akseli on pallon halkaisija.

**Seuraus 4.2.** *Olkoot  $P$  ja  $Q$  pallon pisteitä, jotka eivät ole antipodeja. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen pisteiden  $P$  ja  $Q$  kautta kulkeva isoympyrä.*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 192]). Olkoon  $O$  pallon keskipiste ja olkoot  $P$  ja  $Q$  pallon pisteitä. Oletetaan, että pisteet  $O$ ,  $P$  ja  $Q$  eivät ole samalla suoralla eli ne määrittävät yksikäsitteisen tason  $\pi$ . Tämä taso leikkaa pallon ja leikkaus on yksikäsitteinen isoympyrä. Jos pisteet  $O$ ,  $P$  ja  $Q$  ovat kaikki samalla suoralla, on suora pallon halkaisija. Tällöin pisteet  $P$  ja  $Q$  ovat antipodeja ja niiden kautta voidaan piirtää useita eri isoympyröitä. Tämän vuoksi antipodipisteet on poissuljettu vaihtoehto.  $\square$

**Seuraus 4.3.** *Kolme pallon pistettä määrittää yksikäsitteisen pallon ympyrän.*

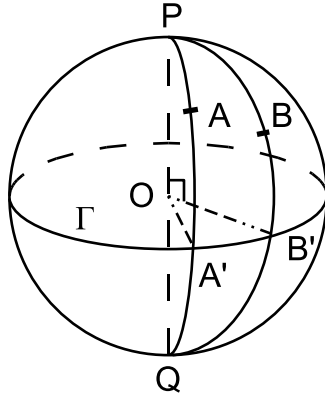
*Todistus.* (Vrt. [2, s. 192]). Olkoot  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  pallon pisteitä. Ne eivät voi olla kaikki samalla suoralla, koska ovat kaikki pallon pisteitä ja pallolla ja suoralla voi olla vain yksi tai kaksi leikkauspistettä. Näin ollen pisteet  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  määrittävät yksikäsitteisen tason, joka taas leikatessaan pallon määrittää yksikäsitteisen ympyrän.  $\square$

Pallogeometriassa pallon isoympyrät vastaavat tason suoraa. Otetaan nyt tarkasteluun kaksi pallon pistettä, jotka ovat toistensa antipodit. Näiden pisteiden kautta voidaan piirtää useita eri isoympyröitä. Näin ollen pallogeometriassa kaksi pistettä eivät välttämättä määritä yksikäsitteistä suoraa, joten Eukleideen ensimmäinen aksiooma ei pidä paikkaansa. Myöskään yhdensuuntaisuusaksiooma ei päde pallogeometriassa. Nimittäin, kun tutkitaan suoraa, jotka siis ovat pallon isoympyröitä, huomataan, että ne kaikki leikkaavat toisensa. Tästä seuraa, ettei suoran ulkopuolisen pisteen kautta voida piirtää suoraa, jolla ei olisi yhteistä pistettä alkuperäisen suoran kanssa. Täten pallogeometriassa ei ole yhdensuuntaisia suoraa. Koska pallogeometria ei noudata yhdensuuntaisuusaksioomaa, se on epäeuklidinen geometria.

## 4.2 Pallokolmio

**Määritelmä 4.4.** Olkoot  $A$  ja  $B$  eri isoympyröiden pisteitä. Nämä isoympyrät leikkaavat toisensa ja leikkaussuora on pallon halkaisija. Isoympyröiden puolikkaat muodostavat kahden tason välisen kulman, jonka särmänä on pallon halkaisija (ks. kuva 4.3). Tätä kulmaa kutsutaan *pallokulmaksi*. Olkoon  $P$  halkaisijan päätepiste. Pallokulmaa merkitään  $\angle APB$  tai jos sekaannuksen vaaraa ei ole  $\angle P$ . *Pallokulman suuruus* on sitä vastaavan kahden tason välisen kulman suuruus.





Kuva 4.3: Pallokulmassa  $\angle P = \widehat{A'B'}$ .

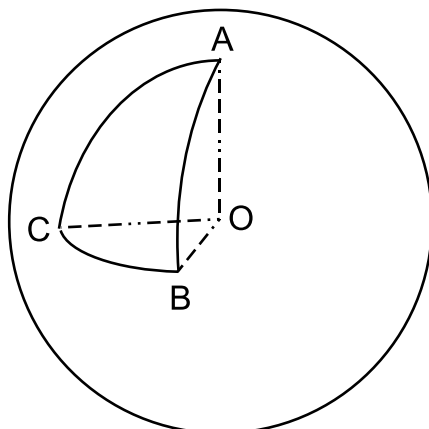
Seuraava lause näyttää, että on olemassa keino laskea pallokulman koko kaarien avulla.

**Lause 4.4.** *Olkoon  $\angle P$  kaarien  $\widehat{PA}$  ja  $\widehat{PB}$  määrittämä pallokulma. Olkoon  $P$  isoympyrän  $\Gamma$  napa. Jatketaan kaaria  $\widehat{PA}$  ja  $\widehat{PB}$  siten, että ne leikkaavat isoympyrän  $\Gamma$  pisteissä  $A'$  ja  $B'$ . Tällöin  $\angle P = \widehat{A'B'}$ , missä kaari  $\widehat{A'B'}$  on isoympyrän  $\Gamma$  kaari.*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 193]). Olkoon piste  $O$  pallon keskipiste ja olkoon piste  $Q$  pisteen  $P$  antipodi. Jana  $PQ$  on pallon halkaisija. Kaksi tätä halkaisijaa vasten kohtisuorassa olevaa pallon sädettä määrittävät tason  $\pi$ , joka on kohtisuorassa halkaisijaa vasten (ks. kuva 4.3). Tämä taso muodostaa isoympyrän  $\Gamma$  leikatessaan pallon. Isoympyrän  $\Gamma$  keskipiste on  $O$  ja navat ovat pisteet  $P$  ja  $Q$ . Olkoon piste  $A'$  pisteiden  $P$ ,  $A$  ja  $Q$  määrittämän puoliympyrän ja isoympyrän  $\Gamma$  leikkauspiste. Vastaavasti olkoon piste  $B'$  pisteiden  $P$ ,  $B$  ja  $Q$  määrittämän puoliympyrän ja isoympyrän  $\Gamma$  leikkauspiste. Koska säde  $OP$  on kohtisuorassa isoympyrän  $\Gamma$  tasoa vasten, on  $OP \perp OA'$  ja  $OP \perp OB'$ . Täten  $\angle A'OB'$  on kahden tason välinen kulma, joka määrittää pallokulman  $\angle P$ , eli  $\angle A'OB' = \angle P$ . Nyt, koska kulma  $\angle A'OB'$  on kaaren  $\widehat{A'B'}$  keskuskulma, niin  $\angle P = \angle A'OB' = \widehat{A'B'}$ .  $\square$

**Määritelmä 4.5.** *Pallokolmio* on pallon pinnan alue, jonka muodostavat kolmen isoympyrän kaaret, jotka leikkaavat pareittain päättepisteissään (ks. kuva 4.4). Merkitään pallokolmiota  $\triangle ABC$ .

Isoympyröiden kaaret ovat pallokolmion sivut, kuvassa 4.4  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{AC}$  ja  $\widehat{BC}$ . Kaarien leikkauspisteitä  $A$ ,  $B$  ja  $C$  sanotaan pallokolmion kärjiksi. Pallokolmion kulmat ovat kaarien pareittain määrittämät pallokulmat  $\angle A$ ,  $\angle B$  ja  $\angle C$ .



Kuva 4.4: Pallokolmio.

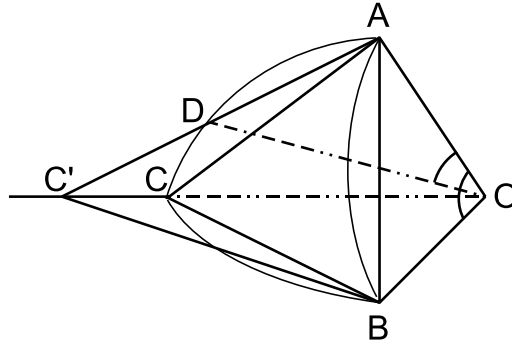
Jokainen pallokolmio  $\triangle ABC$  muodostaa kolmen tason välisen kulman. Kun yhdistetään pallon keskipiste jokaiseen pallokolmion kärkeen, muodostuu säteet  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$ . Jokainen pallokolmion sivuista muodostaa pallon keskipisteen kanssa tason. Nämä kolme tasoa leikkaavat toisensa keskipisteessä ja näin ollen muodostavat kolmen tason välisen kulman  $\angle OAC$ . Pallokolmio  $\triangle ABC$  on kolmen tason välisen kulman  $\angle OAC$  ja pallon leikkaus. Pallokolmion sivut mitataan kolmen tason välisen kulman tahkokulmina,  $\angle BOA = \widehat{BA}$ ,  $\angle BOC = \widehat{BC}$  ja  $\angle AOC = \widehat{AC}$ . Pallokolmion  $\triangle ABC$  kulmat ovat vastaavan kolmen tason välisen kulman muodostamat kahden tason väliset kulmat. Pallokulma voidaan liittää sen muodostamaan kolmen tason väliseen kulmaan. Seuraavien lauseiden todistuksissa käytetään hyväksi tätä tietoa.

**Lause 4.5** (Kolmioepäyhtälö pallokolmiolle). *Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio. Tällöin  $\widehat{AB} + \widehat{BC} > \widehat{CA}$ .*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 164-165 ja 194]). Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio ja olkoon pallon keskipiste  $O$ . Tarkastellaan pallokolmion muodostamaa kolmen tason välistä kulmaa  $\angle OAC$ . Olkoon  $\angle COA$  sen suurin tahkokulma eli kolmion kaarista suurin on  $\widehat{CA}$ . Riittää todistaa, että  $\widehat{CA} < \widehat{AB} + \widehat{BC}$ , koska  $\widehat{AB} < \widehat{CA}$  ja  $\widehat{BC} < \widehat{CA}$ . Olkoon  $D$  sellainen kaaren  $\widehat{CA}$  piste, että  $\angle AOD = \angle AOB$  (ks. kuva 4.5). Koska pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $D$  ovat kaikki pallon pisteitä, niin  $OA = OB = OD$ . Nyt kolmioiden yhtenevyyslauseen (sks) perusteella  $\triangle AOB \cong \triangle AOD$  ja siten myös  $AD = AB$ .

Jatketaan nyt janaa  $AD$  siten, että se leikkaa suoran  $OC$  pisteessä  $C'$ . Näin muodostuu tasokolmio  $\triangle ABC'$ , josta kolmioepäyhtälöä soveltamalla saadaan, että  $AB + BC' > AC'$ . Tästä edelleen saadaan  $AB + BC' > AD +$

$DC'$  eli  $BC' > DC'$ . Tarkastellaan nyt tasokolmioita  $\triangle BOC'$  ja  $\triangle DOC'$ . Näissä tasokolmioissa  $OB = OD$ , molemmilla on sama sivu  $OC'$  ja  $BC' > DC'$ . Täten  $\angle BOC' > \angle DOC'$ . Nyt yhteen laskemalla saadaan  $\angle AOB + \angle BOC' > \angle AOB + \angle DOC'$ , josta edelleen  $\angle AOB + \angle BOC' > \angle AOD + \angle DOC' = \angle AOC'$ . Koska piste  $C'$  on suoralla  $OC$ , niin edellisestä saadaan  $\angle AOB + \angle BOC > \angle AOC$  eli  $\widehat{AB} + \widehat{BC} > \widehat{CA}$ .  $\square$



Kuva 4.5: Kolmioepäyhtälön todistaminen.

**Lause 4.6.** *Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio. Tällöin  $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} < 360^\circ$ .*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 165-166 ja 194]). Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio ja olkoon pallon keskipiste  $O$ . Tarkastellaan pallokolmion muodostamaa kolmen tason välistä kulmaa  $\angle OABC$ . Kulma muodostaa tetraedrin, jonka pohjana on kolmio  $\triangle ABC$  ja kärkenä piste  $O$ . Tetraedrissä on neljä kolmen tason välistä kulmaa  $\angle OABC$ ,  $\angle AOB$ ,  $\angle BOAC$  ja  $\angle COAB$ . Lauseen 4.5 todistuksen mukaan kolmen tason väliselle kulmalle  $\angle OABC$  pätee  $\angle AOB + \angle BOC > \angle AOC$ . Täten tetraedrin kolmen tason välisistä kulmista saadaan seuraavat epäyhtälöt

$$\angle OBA + \angle OBC > \angle ABC,$$

$$\angle OCB + \angle OCA > \angle BCA,$$

$$\angle OAC + \angle OAB > \angle CAB.$$

Kun lasketaan epäyhtälöt yhteen ja järjestetään termit uudestaan, huomataan, että oikealla puolella on kolmion  $\triangle ABC$  kulmien summa. Saadaan

$$(\angle OBA + \angle OAB) + (\angle OBC + \angle OCB) + (\angle OCA + \angle OAC) > 180^\circ.$$

Kolmion kulmien summan perusteella sulkulausekkeet saadaan muutettua muotoon

$$(180^\circ - \angle AOB) + (180^\circ - \angle BOC) + (180^\circ - \angle COA) > 180^\circ,$$

josta saadaan edelleen

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < 360^\circ.$$

Nyt, koska kaari mitataan sitä vastaavan keskuskulman asteina, saadaan mitä haluttiinkin todistaa eli

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} < 360^\circ.$$

□

**Määritelmä 4.6.** Olkoot  $A$  ja  $B$  pallon pisteitä. Pisteet määrittävät isoymyrän ja jakavat sen kahdeksi kaareksi. Lyhyempää näistä kaarista sanotaan *pikkukaareksi*. Pikkukaari yhdistää pisteet  $A$  ja  $B$ . Pisteiden etäisyys toisistaan mitataan pikkukaaren suuruutena. Paremmen suomennoksen puuttessa käytämme tästä pallon pisteiden etäisyydestä käsitettä *palloetäisyys*.

**Seuraus 4.7.** *Olkoot  $A$  ja  $B$  sellaiset pallon pisteet, etteivät ne ole antipodeja. Pisteiden  $A$  ja  $B$  palloetäisyys on lyhyempi kuin mikä tahansa kaarimurtoviiva pisteiden välillä.*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 195]). Olkoot  $A$  ja  $B$  pallon pisteitä ja olkoon kaari  $\widehat{AB}$  niiden välinen pikkukaari. Oletetaan, että pisteitä  $A$  ja  $B$  yhdistää myös pallon kaaret  $\widehat{AC}$  ja  $\widehat{CB}$ , missä piste  $C$  ei ole pikkukaarella  $\widehat{AB}$ . Nyt soveltamalla kolmioepäyhtälöä pallokolmioon  $\triangle ABC$  saadaan, että  $\widehat{AB} < \widehat{AC} + \widehat{CB}$ . Oletetaan seuraavaksi, että pallon kaarista muodostettu polku  $ACDB$  yhdistää pisteet  $A$  ja  $B$  ja pisteet  $C$  ja  $D$  eivät ole pikkukaarella  $\widehat{AB}$ . Vastavasti pallokolmiossa  $\triangle BCD$  on  $\widehat{CB} < \widehat{CD} + \widehat{DB}$ . Nyt sijoittamalla saadaan  $\widehat{AB} < \widehat{AC} + \widehat{CB} < \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB}$ , kuten haluttiin. Samoin saadaan perusteltua kaikki äärellisen monen kaaren polut. □

**Esimerkki 4.2.** Olkoon ympyrän säde  $r = 10$  cm. Olkoot  $A$  ja  $B$  kaksi ympyrän pistettä ja niitä yhdistävän janteen pituus on 10 cm. Seurauslauseen 4.3 mukaan pisteet  $A$  ja  $B$  muodostavat yksikäsitteisen isoymyrän. Janat  $OA$  ja  $OB$  ovat ympyrän säteitä ja niiden pituus on 10 cm. Muodostunut kolmio  $\triangle ABO$  on tasasivuinen ja siten sen kaikki kulmat ovat yhtä suuria eli  $\angle AOB = 60^\circ$ . Koska kaaren suuruus määritetään sen keskuskulman suuruutena, on  $\widehat{AB} = 60^\circ$ . Siis pisteiden  $A$  ja  $B$  palloetäisyys on  $60^\circ$

Pikkukaari, joka yhdistää kaksi pallon pistettä, on lyhyempi kuin mikä tahansa muu ympyrän kaari, joka yhdistää pisteet.

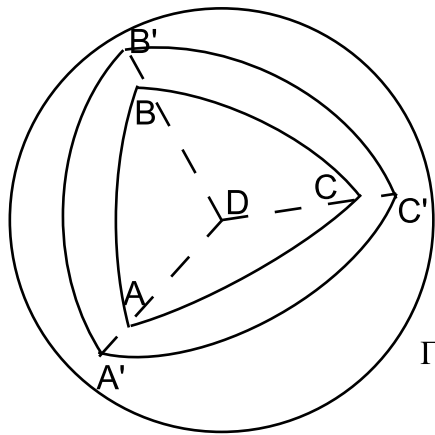
### 4.3 Napakolmio

Aiemmin määritelmässä 4.3 määriteltiin ympyrän napa. Tarkastellaan nyt erityisesti isoymyröiden nappoja ja aloitetaan hyödyllisellä apulauseella.

**Apulause 4.8.** *Olkoon  $\Gamma$  isoympyrä ja olkoot pisteet  $P$  ja  $Q$  sen navat. Tällöin napojen  $P$  ja  $Q$  palloetäisyys mihin tahansa isoympyrän  $\Gamma$  pisteeseen on  $90^\circ$ .*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 195-196]). Olkoon pallon keskipiste  $O$  ja olkoot  $A$  ja  $B$  isoympyrän  $\Gamma$  pisteitä. Olkoot pisteet  $P$  ja  $Q$  isoympyrän  $\Gamma$  napoja. Navan määritelmän mukaan jana  $PQ$  on kohtisuorassa isoympyrän  $\Gamma$  tasoa vastaan pisteessä  $O$ . Säteet  $OA$  ja  $OB$  ovat isoympyrän tasossa ja siten  $\angle POA = \angle POB = 90^\circ$ . Tästä puolestaan seuraa, että  $\widehat{PA} = \widehat{PB} = 90^\circ$ . Kaaret  $\widehat{PA}$  ja  $\widehat{PB}$  ovat pikkukaaria, jotka yhdistävät pisteen  $P$  isoympyrän  $\Gamma$  vapaasti valittuihin pisteisiin  $A$  ja  $B$ , joten pisteen  $P$  palloetäisyys mihin tahansa isoympyrän pisteeseen on  $90^\circ$ . Sama pätee myös pisteelle  $Q$ .  $\square$

**Määritelmä 4.7.** *Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio ja olkoon pallon keskipiste  $O$ . Kaari  $\widehat{BC}$  määrittää pallon isoympyrän ja olkoon piste  $A'$  tämän isoympyrän sellainen napa, joka on samalla puolella isoympyrän tasoa kuin piste  $A$ . Vastaavasti olkoon piste  $B'$  kaaren  $\widehat{CA}$  määrittämän isoympyrän sellainen napa, joka on samalla puolella isoympyrän tasoa kuin piste  $B$  ja olkoon piste  $C'$  kaaren  $\widehat{AB}$  määrittämän isoympyrän sellainen napa, joka on samalla puolella isoympyrän tasoa kuin piste  $C$  (ks. kuva 4.6). Tällöin pallokolmiota  $\triangle A'B'C'$  sanotaan pallokolmion  $\triangle ABC$  *napakolmioksi*.*



Kuva 4.6: Kolmion  $\triangle ABC$  napakolmio  $\triangle A'B'C'$ .

Seuraava lause osoittaa, että napakolmiona oleminen on symmetrinen relaatio.

**Lause 4.9.** *Olkoon pallokolmio  $\triangle A'B'C'$  pallokolmion  $\triangle ABC$  napakolmio. Tällöin myös pallokolmio  $\triangle ABC$  on pallokolmion  $\triangle A'B'C'$  napakolmio.*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 196-197]). Lauseen todistamiseksi pitää osoittaa, että pallokolmion  $\triangle ABC$  kärjet ovat pallokolmion  $\triangle A'B'C'$  sivujen muodostamien isoympyröiden napa. Osoitetaan, että  $A$  on kolmion sivun  $\widehat{B'C'}$  muodostaman isoympyrän napa. Pisteiden  $B$  ja  $C$  osoittaminen sivujen  $\widehat{C'A'}$  ja  $\widehat{A'B'}$  muodostamien isoympyröiden navoiksi menee vastaavasti.

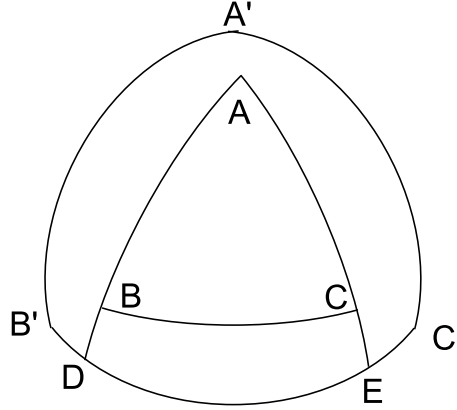
Napakolmion määritelmän perusteella piste  $B'$  on kaaren  $\widehat{CA}$  muodostaman isoympyrän napa. Apulauseen 4.8 mukaan pisteen  $A$  palloetäisyys pisteestä  $B'$  on  $90^\circ$ . Vastaavasti piste  $C'$  on kaaren  $\widehat{AB}$  napa ja sen palloetäisyys pisteestä  $A$  on  $90^\circ$ . Muodostetaan nyt säteet  $OA$ ,  $OB'$  ja  $OC'$ . Koska pisteen  $A$  palloetäisyys pisteistä  $B'$  ja  $C'$  on  $90^\circ$ , niin  $\widehat{AB'} = 90^\circ = \widehat{AC'}$ , joten  $\angle AOB' = 90^\circ = \angle AOC'$ . Näin ollen säde  $AO$  on kohtisuorassa isoympyrän  $\widehat{B'C'}$  tasoa vastaan pallon keskipisteessä  $O$ . Nyt, koska  $A$  on pallon piste, sen pitää olla kaaren  $\widehat{BC}$  muodostaman isoympyrän akselin päätepiste eli sen napa. Lisäksi, jos piste  $A$  ei olisi pisteen  $A'$  kanssa samalla puolella kaaren  $\widehat{B'C'}$  määrittämän isoympyrän tasoa, myöskään piste  $A'$  ei olisi pisteen  $A$  kanssa samalla puolella kaaren  $\widehat{BC}$  määrittämän isoympyrän tasoa. Tällöin pallokolmio  $\triangle A'B'C'$  ei olisi pallokolmion  $\triangle ABC$  napakolmio. Siis kaaren  $\widehat{B'C'}$  määrittämän isoympyrän napa  $A$  on pisteen  $A'$  kanssa samalla puolella isoympyrän tasoa.  $\square$

Siirrytään nyt tarkastelemaan yksityiskohtaisemmin napakolmioiden kulmien suhteita. Seuraavassa seurauslauseessa osoitamme, että jokainen pallokolmion napakolmion kulma on alkuperäisen kolmion vastakkaisen sivun suplementtikulma.

**Seuraus 4.10.** *Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio ja olkoon  $\triangle A'B'C'$  sen napakolmio. Tällöin  $\angle A + \widehat{B'C'} = 180^\circ$ .*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 197-198]). Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio ja  $\triangle A'B'C'$  sen napakolmio. Jatketään kolmion  $\triangle ABC$  kaaria  $\widehat{AB}$  ja  $\widehat{AC}$  niiden muodostamia isoympyröitä pitkin siten, että ne leikkaavat kaaren  $\widehat{B'C'}$  pisteissä  $D$  ja  $E$  (ks. kuva 4.7). Nyt napakolmion määritelmän perusteella piste  $B'$  on kaaren  $\widehat{AE}$  määrittämän isoympyrän napa ja siten apulauseen 4.8 perusteella  $\widehat{B'E} = 90^\circ$ . Vastaavasti piste  $C'$  on kaaren  $\widehat{AD}$  määrittämän isoympyrän napa ja  $\widehat{C'D} = 90^\circ$ . Laskemalla nämä yhteen saadaan  $\widehat{B'E} + \widehat{C'D} = 180^\circ$ . Toisaalta  $\widehat{B'E} = \widehat{B'D} + \widehat{DE}$ , joten  $\widehat{B'E} + \widehat{C'D} = (\widehat{B'D} + \widehat{DE}) + \widehat{C'D} = (\widehat{B'D} + \widehat{C'D}) + \widehat{DE} = \widehat{B'C'} + \widehat{DE}$  eli  $\widehat{B'C'} + \widehat{DE} = 180^\circ$ . Piste  $A$  on kaaren  $\widehat{B'C'}$  määrittämän isoympyrän napa. Koska pisteet  $B'$ ,  $C'$ ,  $D$  ja  $E$  ovat kaikki samalla isoympyrällä, on piste  $A$  myös kaaren  $\widehat{DE}$  määrittämän iso-

ympyrän napa. Näin ollen lauseen 4.4 perusteella  $\angle A = \widehat{DE}$ . Nyt, koska  $\widehat{DE} = 180^\circ - \widehat{B'C'}$ , niin saadaan  $\angle A = 180^\circ - \widehat{B'C'}$  eli  $\widehat{B'C'} + \angle A = 180^\circ$ .  $\square$



Kuva 4.7: Seurauslauseen 4.10 todistaminen.

Nyt voidaan esitellä tärkeä lause, joka on hieman yllättävä. Nimittäin pallokolmion kulmien summa ylittää aina  $180^\circ$ , mutta ei koskaan  $540^\circ$ .

**Lause 4.11.** *Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio. Tällöin*

$$180^\circ < \angle A + \angle B + \angle C < 540^\circ.$$

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 198-199]). Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio ja  $\triangle A'B'C'$  sen napakolmio. Seurauslauseen 4.10 perusteella  $\angle A + \widehat{B'C'} = 180^\circ$ ,  $\angle B + \widehat{A'C'} = 180^\circ$  ja  $\angle C + \widehat{A'B'} = 180^\circ$ . Kun nämä kolme yhtälöä yhdistetään, saadaan

$$(4.1) \quad \angle A + \angle B + \angle C + \widehat{B'C'} + \widehat{A'C'} + \widehat{A'B'} = 540^\circ.$$

Lauseen 4.6 mukaan pallokolmion sivujen summa on vähemmän kuin  $360^\circ$ . Siis  $\widehat{B'C'} + \widehat{A'C'} + \widehat{A'B'} < 360^\circ$ . Kun tästä epäyhtälöstä vähennetään yhtälö (4.1) saadaan  $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$ , joka on puolet siitä mitä haluttiin todistaa. Toinen puoli saadaan yhtälöstä (4.1), kun huomataan, että  $\widehat{B'C'} + \widehat{A'C'} + \widehat{A'B'} > 0^\circ$ . Saadaan, että  $\angle A + \angle B + \angle C < 540^\circ$ . Siis  $180^\circ < \angle A + \angle B + \angle C < 540^\circ$ .  $\square$

Annetaan seuraavaksi havainnollistava esimerkki tästä lauseesta.

**Esimerkki 4.3.** Olkoon piste  $A$  isoympyrän  $\Gamma$  napa ja olkoot pisteet  $B$  ja  $C$  isoympyrän  $\Gamma$  pisteitä. Pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  muodostavat pallokolmion  $\triangle ABC$ . Nyt apulauseen 4.8 perusteella pisteen  $A$  palloetäisyys mistä tahansa

isoympyrän  $\Gamma$  pisteestä on  $90^\circ$ . Näin ollen kaarien  $\widehat{AB}$  ja  $\widehat{BC}$  sekä  $\widehat{AC}$  ja  $\widehat{BC}$  muodostamat kahden tason väliset kulmat ovat asteluvuiltaan  $90^\circ$ , joten  $\angle B = \angle C = 90^\circ$ . Nyt pallokolmion  $\triangle ABC$  kulmien summa on jo  $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  ilman kulman  $\angle A$  astelukua. Jos valitaan kulman  $\angle A$  asteluvuksi  $1^\circ$ , niin kulmien summaksi tulee  $90^\circ + 90^\circ + 1^\circ = 181^\circ > 180^\circ$ , jos taas valitaan  $\angle A = 90^\circ$ , niin summaksi tulee  $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ > 180^\circ$ . Tällainen kolmio maapallolla saadaan esimerkiksi, kun piste  $A$  valitaan pohjoisnavaksi ja pisteet  $B$  ja  $C$  pisteiksi päiväntasaajalla.

#### 4.4 Pallokolmioiden yhtenevyys

Eukleideen tasogeometriasta tuttujen kolmioiden yhtenevyyslauseiden (sks), (ksk) ja (sss) pääpiirteet voidaan yleistää myös pallokolmioille. Sellaisenaan lauseet eivät päde pallokolmioille, vaan pitää ottaa huomioon pallokolmion ominaisuudet ja tehdä hieman enemmän oletuksia kuin tasokolmioilla. Tästä eroavuudesta johtuen pallokolmioille on voimassa myös yksi yhtenevyyslause, jota ei tasokolmioilla ole. Se on yhtenevyyslause (kkk). Tämä voi tuntua hieman yllättävältä, mutta käytännössä se tarkoittaa, että pallokolmioille ei ole olemassa tasokolmioilta tuttua yhdenmuotoisuuslauseetta (kk). Oikeastaan pallokolmioille ei ole olemassa ollenkaan yhdenmuotoisuutta. Toisaalta pallokolmioiden ominaisuus symmetria määritellään tässä kappaleessa. Aloitetaan yhtenevyyden määritelmällä pallokolmioille.

**Määritelmä 4.8.** Olkoot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'B'C'$  pallokolmioita. Oletetaan, että pallokolmioiden vastinsivut ja vastinkulmat on järjestetty samaan järjestykseen. Pallokolmiot ovat *yhtenevät*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa

- (1)  $\angle A = \angle A'$ ,
- (2)  $\angle B = \angle B'$ ,
- (3)  $\angle C = \angle C'$ ,
- (4)  $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ ,
- (5)  $\widehat{AC} = \widehat{A'C'}$ ,
- (6)  $\widehat{BC} = \widehat{B'C'}$ .

Keskeinen idea pallokolmioiden yhtenevyydessä on se, että pallokolmio  $\triangle A'B'C'$  voidaan siirtää vastaamaan pallokolmiota  $\triangle ABC$  ilman sen kaarevuuksien muuttumista. Muodostetaan nyt pallokolmio  $\triangle A''B''C''$ , joka on peilikuva pallokolmiosta  $\triangle ABC$  pallon keskipisten suhteen. Tällöin on huomioitava, että kärjet  $A''$ ,  $B''$  ja  $C''$  ovat järjestyksessä myötäpäivään, kun taas kärjet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat järjestyksessä vastapäivään. Tämä johtaa pallokolmioiden symmetrian määritelmään.



**Määritelmä 4.9.** Olkoot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A''B''C''$  pallokolmioita. Oletetaan, että pallokolmioiden vastinsivut ja vastinkulmat on järjestetty toisiinsa nähden kääntettyyn järjestykseen. Pallokolmiot ovat *symmetriset*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa

- (1)  $\angle A = \angle A''$ ,
- (2)  $\angle B = \angle B''$ ,
- (3)  $\angle C = \angle C''$ ,
- (4)  $\widehat{AB} = \widehat{A''B''}$ ,
- (5)  $\widehat{AC} = \widehat{A''C''}$ ,
- (6)  $\widehat{BC} = \widehat{B''C''}$ .

Symmetrian määritelmästä seuraa, että tasokolmioiden yhtenevyyskuvaus peilaus ei pallokolmioilla säilytä yhtenevyyttä. Pallokolmiota  $\triangle A''B''C''$  ei voi vain kääntää ympäri vastaamaan pallokolmiota  $\triangle ABC$  ilman, että kolmion kaarevuudet muuttuvat. Tämä erottaa pallokolmion ominaisuudet tasokolmion ominaisuuksista, sillä tasossa kolmiolla ei ole kaarevuuksia.

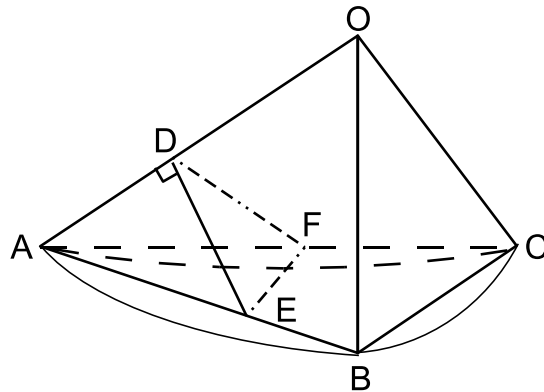
**Lause 4.12** (yhtenevyyslause (sss) pallokolmiolle). *Olkoot sekä  $\triangle ABC$  että  $\triangle A'B'C'$  pallokolmioita. Olkoot kolmioiden vastinsivut yhtä suuret eli  $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ ,  $\widehat{AC} = \widehat{A'C'}$  ja  $\widehat{BC} = \widehat{B'C'}$ . Tällöin pallokolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'B'C'$  ovat yhtenevät, jos vastinsivut ovat peräkkäin samassa järjestyksessä. Jos vastinsivut ovat käänteisessä järjestyksessä, pallokolmiot ovat symmetriset.*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 167-168 ja 201]). Olkoot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'B'C'$  pallokolmioita, joissa  $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ ,  $\widehat{AC} = \widehat{A'C'}$  ja  $\widehat{BC} = \widehat{B'C'}$ . Kolmioiden kärjet ovat yhteydessä pallon keskipisteeseen ja muodostavat säteet  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OA'$ ,  $OB'$  ja  $OC'$ . Pallokolmioiden vastinsivujen yhtäsuuruuden perusteella saadaan  $\angle AOB = \angle A'OB'$ ,  $\angle AOC = \angle A'OC'$  ja  $\angle BOC = \angle B'OC'$ . Nyt pallokolmioiden muodostamien kolmen tason välisten kulmien  $\angle OABC$  ja  $\angle OA'B'C'$  tahkokulmat ovat pareittain yhtä suuret. Muodostetaan jänteet  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $A'B'$ ,  $B'C'$  ja  $C'A'$ . Tällöin tasokolmioiden yhtenevyyslauseen (sks) perusteella  $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$ ,  $\triangle OBC \cong \triangle OB'C'$  ja  $\triangle OAC \cong \triangle OA'C'$ . Koska edellisen perusteella  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  ja  $CA = C'A'$ , niin tasokolmioiden yhtenevyyslauseen (sss) perusteella tasokolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'B'C'$  ovat yhtenevät.

Olkoon  $D$  piste säteellä  $OA$  ja olkoon  $E$  sellainen piste jännteellä  $AB$ , että jana  $DE$  on kohtisuorassa sädetä  $OA$  vastaan (ks. kuva 4.8). Vastaavasti muodostetaan jana  $DF$  siten, että piste  $F$  on jännteellä  $AC$  ja jana  $DF$  on kohtisuorassa sädetä  $OA$  vastaan. Nyt kulma  $\angle EDF$  on kahden tason välinen kulma, jonka särmä on säde  $OA$ . Muodostetaan vastaavasti pisteet

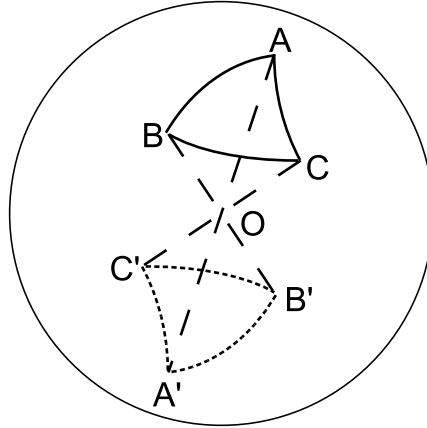
$D'$ ,  $E'$  ja  $F'$  sekä kulma  $\angle E'D'F'$  pallokolmiolle  $\triangle A'B'C'$ . Olkoon piste  $D'$  sellainen piste säteellä  $OA'$ , että  $DA = D'A'$ .

Tasokolmioiden  $\triangle OAB$  ja  $\triangle OA'B'$  yhtenevyydestä saadaan, että  $\angle OAB = \angle OA'B'$ . Vastaavasti tasokolmioiden  $\triangle OAC$  ja  $\triangle OA'C'$  yhtenevyydestä saadaan, että  $\angle OAC = \angle OA'C'$ . Tasokolmioiden yhtenevyytlauseen (ksk) perusteella  $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$  ja  $\triangle ADF \cong \triangle A'D'F'$ . Tästä seuraa, että  $AE = A'E'$  ja  $AF = A'F'$ . Kolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'B'C'$  yhtenevyydestä puolestaan saadaan, että  $\angle BAC = \angle EAF = \angle E'A'F' = \angle B'A'C'$  ja tasokolmioiden yhtenevyytlauseen (sks) perusteella  $\triangle AEF \cong \triangle A'E'F'$ , jonka perusteella  $EF = E'F'$ . Myös  $DE = D'E'$  ja  $DF = D'F'$ , koska  $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$  ja  $\triangle ADF \cong \triangle A'D'F'$ . Nyt tasokolmioiden yhtenevyytlauseen (sss) perusteella saadaan  $\triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$ . Tällöin  $\angle EDF = \angle E'D'F'$ , joka tarkoittaa, että kahden tason väliset kulmat, joiden särminä on  $OA$  ja  $OA'$ , ovat yhtenevät. Tästä edelleen seuraa pallokulman määrittelyn perusteella, että  $\angle A = \angle A'$ . Vastaavalla tavalla saadaan todistettua, että  $\angle B = \angle B'$  ja  $\angle C = \angle C'$ . Näin ollen pallokolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'B'C'$  ovat joko yhtenevät tai symmetriset riippuen vastinsivujen järjestyksestä.  $\square$



Kuva 4.8: Yhtenevyytlauseen (kkk) todistaminen.

**Esimerkki 4.4.** (Vrt. [2, s. 200]). Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio. Olkoon lisäksi  $\triangle A'B'C'$  sellainen pallokolmio, että janat  $AA'$ ,  $BB'$  ja  $CC'$  ovat kaikki pallon halkaisijoita, kuten kuvassa 4.9. Pallokolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'B'C'$  vastinsivut ovat nyt toisiinsa nähden käänteisessä järjestyksessä. Halkaisijat  $AA'$ ,  $BB'$  ja  $CC'$  leikkaavat kaikki toisensa pallon keskipisteessä  $O$ . Halkaisijat  $AA'$  ja  $BB'$  muodostavat pallon keskipisteessä ristikulmat  $\angle AOB$  ja  $\angle A'OB'$ . Koska ristikulmat ovat yhtä suuret, niin  $\angle AOB = \angle A'OB'$ . Vastaavasti pätee  $\angle AOC = \angle A'OC'$  ja  $\angle BOC = \angle B'OC'$ . Koska nämä kaikki kulmat ovat keskuskulmia, niin on myös  $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ ,  $\widehat{AC} = \widehat{A'C'}$  ja  $\widehat{BC} = \widehat{B'C'}$ . Nyt lauseen 4.12 perusteella kolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'B'C'$  ovat symmetriset.



Kuva 4.9: Symmetriset pallokolmiot.

Lauseen 4.12 perusteella saadaan helposti todistettua myös pallokolmioiden yhtenevyyslause (kkk).

**Lause 4.13** (yhtenevyyslause (kkk) pallokolmiolle). *Olkoot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  pallokolmioita, joissa vastinkulmat ovat yhtä suuret eli  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle E$  ja  $\angle C = \angle F$ . Tällöin pallokolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  ovat yhtenevät, jos vastinkulmat ovat peräkkäin samassa järjestyksessä. Jos vastinkulmat ovat käänteisessä järjestyksessä, pallokolmiot ovat symmetriset.*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 201-202]). Olkoot  $\triangle A'B'C'$  ja  $\triangle D'E'F'$  vastaavien pallokolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  napakolmiot. Nyt seurauslauseen 4.10 perusteella  $\angle A + \widehat{B'C'} = 180^\circ$  ja  $\angle D + \widehat{E'F'} = 180^\circ$ . Koska  $\angle A = \angle D$ , on myös  $\widehat{B'C'} = \widehat{E'F'}$ . Vastaavasti pätee  $\widehat{A'C'} = \widehat{D'F'}$  ja  $\widehat{A'B'} = \widehat{D'E'}$ . Nyt lauseen 4.12 perusteella pallokolmio  $\triangle A'B'C'$  on joko yhtenevä tai symmetrinen pallokolmion  $\triangle D'E'F'$  kanssa. Tästä seuraa, että  $\angle A' = \angle D'$ ,  $\angle B' = \angle E'$  ja  $\angle C' = \angle F'$ . Lauseen 4.9 perusteella  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  ovat pallokolmioiden  $\triangle A'B'C'$  ja  $\triangle D'E'F'$  napakolmiot. Nyt seurauslauseen 4.10 perusteella  $\angle A' + \widehat{BC} = 180^\circ$  ja  $\angle D' + \widehat{EF} = 180^\circ$ . Tästä seuraa, että  $\widehat{BC} = \widehat{EF}$ . Vastaavasti  $\widehat{AC} = \widehat{DF}$  ja  $\widehat{AB} = \widehat{DE}$ . Siis jälleen lauseen 4.12 perusteella  $\triangle ABC$  on joko yhtenevä tai symmetrinen kolmion  $\triangle DEF$  kanssa.  $\square$

**Lause 4.14** (yhtenevyyslause (sks) pallokolmiolle). *Olkoot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  pallokolmioita, joissa  $\widehat{AC} = \widehat{DF}$ ,  $\angle A = \angle D$  ja  $\widehat{AB} = \widehat{DE}$ . Tällöin pallokolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  ovat yhteneviä, jos nämä toisiaan vastaavat osat ovat samassa järjestyksessä. Jos ne ovat käännetyssä järjestyksessä, niin kolmiot ovat symmetrisiä.*

*Todistus.* Sivuuetaan. Todistus menee lauseiden 4.12 ja 4.13 perusteella.  $\square$

**Lause 4.15** (yhtenevyyslause (ksk) pallokolmiolle). *Olkoot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  pallokolmioita, joissa  $\angle A = \angle D$ ,  $\widehat{AB} = \widehat{DE}$  ja  $\angle B = \angle E$ . Tällöin pallokolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  ovat yhteneviä, jos nämä toisiaan vastaavat osat ovat samassa järjestyksessä. Jos ne ovat käännetyssä järjestyksessä, niin kolmiot ovat symmetrisiä.*

*Todistus.* Sivuuetaan. Todistus menee lauseiden 4.12 ja 4.13 perusteella.  $\square$

Lauseista 4.12, 4.13, 4.14 ja 4.15 seuraa, että vastaavat yhtenevyyslauseet ovat voimassa myös kolmen tason välisille kulmille.

## 4.5 Pallokolmion pinta-ala

Pallokolmion pinta-alaa tarkasteltaessa käytetään kulman mittayksikkönä asteita. Oletetaan, että kolmiot ovat tietyllä pallolla, jonka keskipiste on  $O$ . Seuraavassa määritelmässä annetaan mittayksikkö pallokolmion pinta-alan tarkastelemiseksi. Paremman suomennoksen puuttuessa kutsutaan sitä palloasteeksi.

**Määritelmä 4.10.** *Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio. Olkoot  $\widehat{AB} = \widehat{AC} = 90^\circ$  ja  $\widehat{BC} = \alpha^\circ$ . Tällöin kolmion pinta-ala on  $\alpha$  palloastetta.*

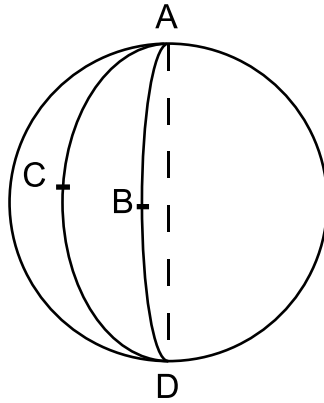
Oletetaan, että minkä tahansa yhtenevien tai symmetristen pallokolmioiden alat ovat yhtä suuret. Huomattakoon, että selvästi pallon palloaste poikkeaa toisen pallon palloasteesta, mikäli pallojen säteet ovat erisuuret.

**Esimerkki 4.5.** *Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio, jossa  $\widehat{AB} = \widehat{AC} = 90^\circ$  ja  $\widehat{PQ} = 1^\circ$ . Tällöin kolmion  $\triangle ABC$  pinta-ala on yksi palloaste. Tämän perusteella voidaan helposti päätellä, että puolipallon pinta-ala on 360 palloastetta ja pallon pinta-ala on 720 palloastetta.*

**Määritelmä 4.11.** *Olkoot pisteet  $A$  ja  $D$  pallon pisteitä ja toistensa anti-podeja. Tarkastellaan kahta pisteiden  $A$  ja  $D$  kautta kulkevaa isoympyrää, joista toinen kulkee pisteen  $B$  kautta ja toinen pisteen  $C$  kautta (ks. kuva 4.10). Näiden isoympyröiden muodostamien puoliympyröiden, jotka leikkaavat toisensa pallon halkaisijalla, rajaamaa pallon osaa  $ABDC$  sanotaan pallokaksikulmioksi*

Pallokaksikulmion kulma on kahden tason välinen kulma, jonka muodostaa puoliympyröiden määrittämät puolitasot.

**Apulause 4.16.** *Pallokaksikulmion ala palloasteissa on kaksinkertaisesti pallokaksikulmion kulman suuruus.*



Kuva 4.10: Pallokaksikulmio.

*Todistus.* Olkoot  $A$  ja  $D$  pallon antipodipisteet ja olkoon  $O$  pallon keskipiste. Tarkastellaan kahta pisteiden  $A$  ja  $D$  kautta kulkevaa isoympyrää, joista toinen kulkee pisteen  $B$  kautta ja toinen pisteen  $C$  kautta. Nyt  $ABDC$  on pallokaksikulmio. Olkoon  $\Gamma$  sellainen isoympyrä, että pisteet  $A$  ja  $D$  ovat sen navat. Olkoon piste  $B'$  isoympyrän  $\Gamma$  ja pisteiden  $A$ ,  $B$  ja  $D$  määrittämän puoliympyrän leikkauspiste. Olkoon piste  $C'$  vastaavasti isoympyrän  $\Gamma$  ja pisteiden  $A$ ,  $C$  ja  $D$  määrittämän puoliympyrän leikkauspiste. Nyt pallokaksikulmio  $ABDC$  muodostuu kahdesta pallokolmiosta  $\triangle AB'C'$  ja  $\triangle DB'C'$ . Koska  $\widehat{AB'} = \widehat{AC'} = \widehat{DB'} = \widehat{DC'} = 90^\circ$ , on pallokolmioiden  $\triangle AB'C'$  ja  $\triangle DB'C'$  pinta-alat  $B'C' = \angle A$  palloastetta. Kaari  $B'C'$  jakaa pallokaksikulmion kahteen yhtä suureen osaan  $\triangle AB'C'$  ja  $\triangle DB'C'$ , joten sen pinta-ala on kaksi kertaa pallokulma  $\angle A$  palloasteina.  $\square$

Palautetaan nyt mieleen lause 4.11, jonka mukaan pallokolmion kulmien summa ylittää aina  $180^\circ$ . Määritellään seuraavassa tämä osuus, joka ylittää  $180^\circ$ .

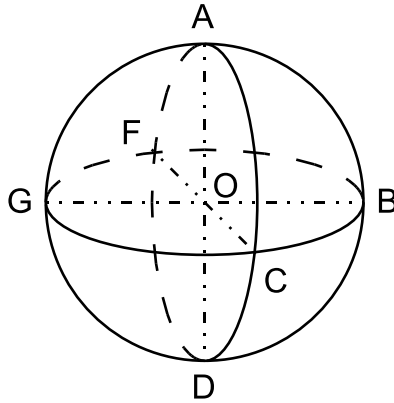
**Määritelmä 4.12.** Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio. Pallokolmion osuutta  $E = \angle A + \angle B + \angle C - 180^\circ$  sanotaan *palloylimääräksi*. Merkitään palloylimäärää kirjaimella  $E$ .

Palloylimäärä  $E$  ei ole vakio, vaan se riippuu pallokolmiosta.

**Lause 4.17.** *Pallokolmion pinta-ala on yhtä suuri kuin pallokolmion palloylimäärä.*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 204]). Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio. Oletetaan, että pallon kahden isoympyrän tasot leikkaavat halkaisijoilla  $AD$ ,  $BG$  ja  $CF$ , kuten kuvassa 4.11. Tasokolmioiden yhtenevuyslauseen (sks) perusteella  $\triangle AOB \cong \triangle GOD$ , joten  $AB = GD$ . Koska yhtä pitkät jänteet leikkaavat yhtä suuret

kaaret, niin  $\widehat{AB} = \widehat{GD}$ . Samoin myös  $\widehat{AF} = \widehat{CD}$  ja  $\widehat{BF} = \widehat{CG}$ . Lauseen 4.12 perusteella pallokolmio  $\triangle ABF$  on yhtenevä tai symmetrinen pallokolmion  $\triangle GDC$  kanssa ja siten näiden pallokolmioiden pinta-alat ovat yhtä suuret.



Kuva 4.11: Isoympyröiden tasojen leikkaus.

Huomataan, että pallokolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle ABF$  yhteenlaskettu pinta-ala on yhtä suuri kuin pallokaksikulmion  $CBFA$  pinta-ala, joka puolestaan on  $2\angle C$  palloastetta apulauseen 4.16 perusteella. Koska pallokolmioiden  $\triangle ABF$  ja  $\triangle GDC$  pinta-alat ovat yhtä suuret, niin pallokolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle GDC$  pinta-alat yhteensä on  $2\angle C$  palloasteina. Kaaret  $\widehat{ABD}$  ja  $\widehat{ACD}$  ovat puoliympyröitä ja muodostavat pallokaksikulmion  $ABDC$ . Täten kolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle BCD$  yhteenlaskettu pinta-ala on sama kuin pallokaksikulmion  $ABDC$  pinta-ala, joka puolestaan on  $2\angle A$  palloasteina. Vastaavasti kaaret  $\widehat{BCG}$  ja  $\widehat{BAG}$  ovat puoliympyröitä ja muodostavat pallokaksikulmion  $BAGC$ , joten kolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle ABG$  yhteenlaskettu pinta-ala on yhtä suuri kuin pallokaksikulmion  $BAGC$  pinta-ala, joka on  $2\angle B$  palloasteina.

Yhdistämällä saadut kolme tulosta saadaan, että pallokolmioiden  $\triangle GDC$ ,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ACG$  ja kolme kertaa pallokolmion  $\triangle ABC$  pinta-alat yhteensä on yhtä suuri kuin kaksi kertaa pallokulmien  $\angle A$ ,  $\angle B$  ja  $\angle C$  summa. Toisaalta pallokolmiot  $\triangle GDC$ ,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ACG$  ja  $\triangle ABC$  muodostavat puolipallon, joten niiden yhteenlaskettu pinta-ala on  $360$  palloastetta. Näin ollen saadaan, että kaksi kertaa pallokolmion  $\triangle ABC$  pinta-ala plus  $360$  palloastetta on yhtä suuri kuin kaksi kertaa pallokulmien  $\angle A$ ,  $\angle B$  ja  $\angle C$  summa. Kun edelleen jaetaan tämä kahdella saadaan, että pallokolmion  $\triangle ABC$  pinta-ala on yhtä suuri kuin sen pallokulmien summa vähennettynä  $180$  palloasteella, joka on sama kuin pallon palloylimäärä.  $\square$

**Esimerkki 4.6.** Olkoon  $\triangle ABC$  pallokolmio ja olkoot sen kulmat  $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$ . Tällöin myös  $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = 90^\circ$ . Nyt palloylimäärä on

$E = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - 180^\circ = 90^\circ$  ja pallokolmion pinta-ala on 90 palloastetta, joka on sama kuin palloylimäärä asteina.

Olko pallokolmion kulmat nyt  $\angle A = \angle B = 90^\circ$  ja  $\angle C = 1^\circ$ . Tällöin myös  $\widehat{AB} = \widehat{AC} = 90^\circ$  ja  $\widehat{BC} = 1^\circ$ . Nyt palloylimäärä on  $E = 90^\circ + 90^\circ + 1^\circ - 180^\circ = 1^\circ$  ja pallokolmion pinta-ala on 1 palloastetta, joka on sama kuin palloylimäärä asteina.

## 4.6 Elliptinen geometria

Pallogeometriassa Eukleideen viides aksiooma, yhdensuuntaisuusaksiooma, ei pidä paikkaansa. Tämän vuoksi pallogeometria on hyperbolinen geometria. Kuten jo huomasimme kappaleessa 4.1, myöskään Eukleideen ensimmäinen aksiooma ei pidä paikkaansa pallogeometriassa eli kahden pisteen kautta ei voida välttämättä piirtää yksikäsitteistä suoraa. Nimittäin, jos kaksi pistettä on toistensa antipodit, niin niiden kautta voidaan piirtää useita eri suoria.

Pallogeometriaa hieman muuttamalla saadaan sellainen epäeuklidinen geometria, jossa pätee ensimmäinen aksiooma. Sitä varten pitää määrittää antipodipisteet yhdeksi ja samaksi pisteeksi. Tarkemmin määriteltynä, jos pisteet  $A'$  ja  $A''$  ovat toistensa antipodipisteet, sanotaan paria  $A = \{A', A''\}$  mallin pisteeksi. Tällä pisteen määritelmällä saadaan aikaiseksi geometria, joka noudattaa Eukleideen ensimmäistä aksioomaa ja sitä kutsutaan *Elliptiseksi geometriaksi* ([2, s. 205]). Nyt kaksi pistettä (siis kaksi antipodipisteiden paria) muodostavat yksikäsitteisen suoran. Tämä ei kuitenkaan muuta yhdensuuntaisuusaksiooman paikkansapitämättömyyttä, joten elliptinen geometria on myös epäeuklidinen geometria.

## 5 Hyperbolinen geometria

### 5.1 Neutraali geometria

Neutraali geometria on geometria, jossa ei oleteta Eukleideen viidettä aksioomaa, yhdensuuntaisuusaksioomaa. Eukleideen aksioomista neljä ensimmäistä pätevät neutraalissa geometriassa. Neutraalia geometriaa kutsutaan myös absoluuttiseksi geometriaksi. Sen tulokset pätevät sekä euklidisessä geometriassa että hyperbolisessa geometriassa, joka esitellään tarkemmin kappaleessa 5.2. Hyperboliseen geometriaan tutustuminen on hyvä aloittaa tutustumalla ensin neutraaliin geometriaan. Esitetäänkin nyt joitakin neutraalin geometrian tuloksia.

**Apulause 5.1.** *Olko  $\triangle ABC$  kolmio. Tällöin  $\angle A + \angle B < 180^\circ$ .*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 119]). Tehdään vastaoletus, että  $\angle A + \angle B \geq 180^\circ$ . Olkoon piste  $C'$  sellainen, että  $\triangle ABC \cong \triangle BAC'$ . Oletetaan nyt, että  $\angle A +$

$\angle B = 180^\circ$ . Tällöin  $\angle CAC' = 180^\circ = \angle CBC'$ . Täten suorat  $CA$  ja  $CB$  leikkaavat sekä pisteessä  $C$  että pisteessä  $C'$ . Tämä ei ole kuitenkaan mahdollista, sillä kaksi eri suoraa ei voi leikata kahdessa eri pisteessä. Näin ollen ei voi olla  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ .

Oletetaan sitten, että  $\angle A + \angle B > 180^\circ$ . Tällöin suora  $CA$  leikkaa kolmion  $\triangle ABC'$  pisteessä  $A$ , joten sen on leikattava myös kolmion sivu  $BC'$ . Vastavasti suora  $CB$  leikkaa kolmion  $\triangle ABC'$  pisteessä  $B$  ja siten myös sivun  $AC'$ . Siis puolisuorien  $CA$  ja  $CB$  pitää leikata toisensa kolmion  $\triangle ABC'$  sisällä. Nyt saadaan taas, että suorat  $CA$  ja  $CB$  leikkaavat kahdessa eri pisteessä, joka ei ole mahdollista. Täten ei voi olla  $\angle A + \angle B > 180^\circ$ . Siis koska ei voi olla  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  eikä  $\angle A + \angle B > 180^\circ$ , niin on oltava  $\angle A + \angle B < 180^\circ$ .  $\square$

**Apulause 5.2.** *Olkkoon  $\triangle ABC$  kolmio. Tällöin on olemassa sellainen kolmio  $\triangle A'B'C'$ , että*

$$\angle C' < \frac{1}{2}\angle C$$

ja

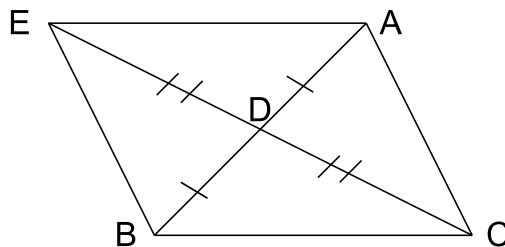
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C'.$$

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 120]). Olkkoon piste  $D$  sivun  $AB$  keskipiste. Olkkoon  $E$  sellainen piste janan  $CD$  jatkeella, että janat  $CD$  ja  $DE$  ovat yhtä pitkät ja pisteet  $C$  ja  $E$  ovat eri puolilla janaa  $AB$  (ks. kuva 5.1). Nyt joko  $\angle ECA \leq \frac{1}{2}\angle BCA$  tai  $\angle BCE \leq \frac{1}{2}\angle BCA$ . Oletetaan, että  $\angle ECA \leq \frac{1}{2}\angle BCA$ . Valitaan kolmioksi  $\triangle A'B'C'$  kolmio  $\triangle AEC$  ja merkitään  $\angle A' = \angle EAC$ ,  $\angle B' = \angle CEA$  ja  $\angle C' = \angle ECA$ . Yhtenevyyslauseen (sks) mukaan  $\triangle BCD \cong \triangle AED$ . Täten

$$\angle A' = \angle DAE + \angle CAD = \angle DBC + \angle CAD = \angle B + \angle A,$$

$$\angle C = \angle BCD + \angle DCA = \angle DEA + \angle DCA = \angle B' + \angle C'.$$

Siis  $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C'$ .  $\square$



Kuva 5.1: Apulauseen 5.2 todistaminen.



**Lause 5.3.** *Olkoon  $\triangle ABC$  kolmio. Tällöin  $\angle A + \angle B + \angle C \leq 180^\circ$ .*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 212]). Tehdään vastaoletus, että  $\triangle ABC$  on sellainen kolmio, jossa  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ + \epsilon$ . Nyt apulauseesta 5.2 seuraa, että kolmio  $\triangle ABC$  voidaan korvata kolmiolla, jonka kulmien summa on  $180^\circ + \epsilon$  ja jossa on kulma, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin  $\frac{1}{2}\angle A$ . Tämä kolmio voidaan edelleen korvata kolmiolla, jonka kulmien summa on  $180^\circ + \epsilon$  ja jossa on kulma, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin  $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\angle A) = \frac{1}{4}\angle A$ .

Tätä menettelytapaa voidaan toistaa  $n$  kertaa. Tällöin saadaan kolmio, jonka kulmien summa on  $180^\circ + \epsilon$  ja jossa on kulma, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin  $\frac{1}{2^n}\angle A$ . Arkhimedeeseen aksiooman perusteella on olemassa sellainen luonnollinen luku  $n$ , että  $\frac{1}{2^n}\angle A < \epsilon$ . Näin ollen saadaan kolmio, jonka kulmien summa on  $180^\circ + \epsilon$  ja yksi kolmion kulmista on pienempi kuin  $\epsilon$ . Täten kahden muun kulman summa on enemmän kuin  $180^\circ$ . Tämä taas on ristiriidassa apulauseen 5.1 kanssa. Siis ei voi olla kolmiota, jonka kulmien summa olisi yli  $180^\circ$ . Täten  $\angle A + \angle B + \angle C \leq 180^\circ$ .  $\square$

Tämä lause saattaa tuntua oudolta, sillä Eukleideen tasogeometriassa on  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ . Nyt pitää kuitenkin muistaa, että euklidisessa geometriassa on voimassa yhdensuuntaisuusaksioma, jota ei nyt neutraalissa geometriassa oleteta.

Seuraavaksi määritellään neutraalin geometrian ominaisuus, defekti. Defekti on verrattavissa pallogeometriassa määritellyyn palloylimäärään. Myöhemmin tullaan huomaamaan, että pallogeometrialla ja hyperbolisella geometrialla on useampiakin samankaltaisuuksia. Pallogeometriassa määriteltiin palloylimäärä kolmion kulmien summan määräksi, joka ylittää  $180^\circ$ . Neutraalissa geometriassa defekti on asteluvun 180 ja kolmion kulmien summan erotus.

**Määritelmä 5.1.** *Olkoon  $\triangle ABC$  kolmio. Tällöin kolmion  $\triangle ABC$  defekti on*

$$D_{\triangle ABC} = 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C).$$

Eukleideen tasogeometriassa kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ . Täten siinä, neutraalin geometrian erikoistapauksena, defekti on aina 0.

**Apulause 5.4.** *Olkoon  $\triangle ABC$  kolmio. Olkoon piste  $D$  pisteiden  $A$  ja  $B$  välissä sivulla  $AB$ . Tällöin  $D_{\triangle ABC} = D_{\triangle ACD} + D_{\triangle BCD}$ .*

*Todistus.* (Vrt. [5, s. 106]). Jana  $CD$  on kolmion  $\triangle ABC$  sivujen  $AC$  ja  $BC$  välissä, joten  $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$ . Koska  $\angle ADC$  ja  $\angle BDC$  ovat

suplementtikulmat, niin  $\angle ADC + \angle BDC = 180^\circ$ . Nyt

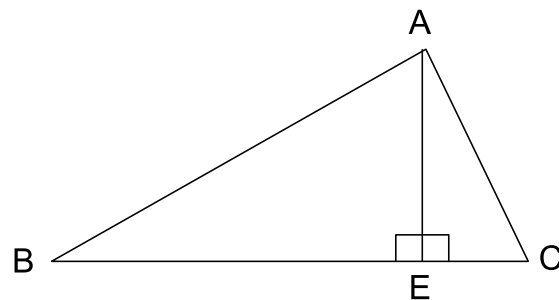
$$\begin{aligned}
 & D_{\triangle ACD} + D_{\triangle BCD} \\
 &= 180^\circ - (\angle CAB + \angle ADC + \angle ACD) \\
 &\quad + 180^\circ - (\angle DBC + \angle BDC + \angle BCD) \\
 &= 360^\circ - \angle CAB - \angle ADC - \angle ACD - \angle ABC - \angle BDC - \angle BCD \\
 &= 360^\circ - (\angle ADC + \angle BDC) - (\angle CAB + \angle ABC + (\angle ACD + \angle BCD)) \\
 &= 180^\circ - (\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB) \\
 &= D_{\triangle ABC}.
 \end{aligned}$$

□

Seuraava lause on tärkeä neutraalissa geometriassa. Sen mukaan laske-  
malla yhden kolmion kulmien summa, saadaan tietoa kaikista geometrisen  
mallin kolmioista.

**Lause 5.5.** *Olkoon  $\triangle ABC$  kolmio. Jos kolmion  $\triangle ABC$  kulmien summa on  $180^\circ$ , niin kaikkien mallin kolmioiden kulmien summa on  $180^\circ$ .*

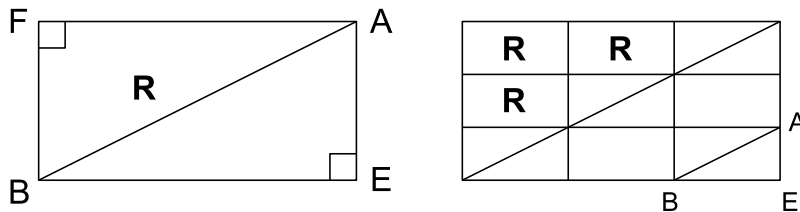
*Todistus.* (Vrt. [2, s. 213-215]) Olkoon  $\triangle ABC$  kolmio, jonka kulmien summa on  $180^\circ$ . Etsitään nyt suorakulmainen kolmio, jonka kulmien summa on  $180^\circ$ . Jos kolmio  $\triangle ABC$  on suorakulmainen, voidaan käyttää suoraan sitä. Jos  $\triangle ABC$  ei ole suorakulmainen kolmio, niin käytetään defektin käsitettä suorakulmaisen kolmion löytämisessä. Olkoon  $\angle A$  kolmion  $\triangle ABC$  suurin kulma. Koska kolmion  $\triangle ABC$  kulmien summa on  $180^\circ$ , niin  $D_{\triangle ABC} = 0$ . Kolmion pisteestä  $A$  piirretty korkeusjana leikkaa sivun  $BC$  pisteessä  $E$  (ks. kuva 5.2). Apulauseen 5.4 mukaan  $D_{\triangle ABC} = 0 = D_{\triangle ABE} + D_{\triangle AEC}$ , josta edelleen defektin positiivisuuden perusteella  $D_{\triangle ABE} = D_{\triangle AEC} = 0$ . Koska kolmion korkeusjana  $AE$  on kohtisuorassa sivua  $BC$  vastaan, niin  $\angle AEB = \angle AEC = 90^\circ$ . Näin on löydetty etsitty suorakulmainen kolmio  $\triangle ABE$ , jonka kulmien summa on  $180^\circ$ , sillä sen defekti on 0.



Kuva 5.2: Suorakulmaisen kolmion löytäminen.

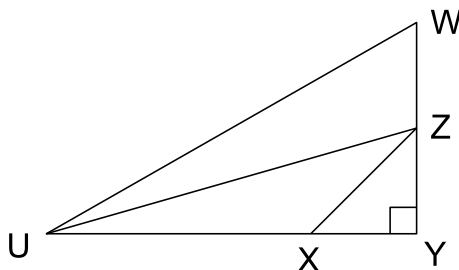
Nyt voidaan liittää kolmioon  $\triangle ABE$  sen kanssa yhtenevä kolmio  $\triangle ABF$  siten, että niillä on sama hypotenuusa  $AB$  ja kulma  $\angle F$  on suora kulma,

kuten kuvassa 5.3. Tällöin kolmiot muodostavat suorakulmion  $R = AFBE$ . Sen kulmien summa on  $360^\circ$ , sillä molempien kolmioiden kulmien summa on  $180^\circ$  ja  $\angle BAE + \angle BAF = \angle EAF$  sekä  $\angle ABE + \angle ABF = \angle EBF$ .



Kuva 5.3: Suorakulmion muodostaminen.

Muodostetaan nyt mielivaltaisen suuri suorakulmio laittamalla suorakulmion  $R$  kanssa yhteneviä suorakulmioita vierekkäin ja päällekkäin kuten kuvassa 5.3. Kaikkien tällaisten mielivaltaisen suurien suorakulmioiden kulmien summa on  $360^\circ$ . Ne voidaan jakaa lävistäjällä kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kulmien summa on  $180^\circ$  ja defekti on 0. Näin on saatu muodostettua yhdestä suorakulmaisesta kolmiosta, jonka defekti on 0, mielivaltaisen suuri suorakulmainen kolmio, jonka defekti on myös 0.



Kuva 5.4: Suuren suorakulmaisen kolmion muodostaminen.

Todistetaan nyt, että jokaisen suorakulmaisen kolmion defekti on 0. Olkoon  $\triangle XYZ$  suorakulmainen kolmio ja kulma  $Y$  sen suora kulma. Muodostetaan vastaavalla tavalla kuin edellä suurempi suorakulmainen kolmio  $\triangle UYW$ , jonka defekti on 0 (ks. kuva 5.4). Tässä kolmiossa sivu  $UY$  sisältää pisteen  $X$  ja sivu  $YW$  sisältää pisteen  $Z$ . Muodostetaan jana  $UZ$  ja käytetään apulausetta 5.4, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} D_{\triangle UYW} &= D_{\triangle UZW} + D_{\triangle UZY} \\ &= D_{\triangle UZW} + D_{\triangle UZX} + D_{\triangle XYZ}. \end{aligned}$$

Koska  $D_{\Delta UYW} = 0$  ja defekti on aina positiivinen, niin  $D_{\Delta UZW} = 0$ ,  $D_{\Delta UZX} = 0$  ja erityisesti  $D_{\Delta XYZ} = 0$ , mikä haluttiinkin todistaa.

Nyt siis jokainen kolmio voidaan jakaa korkeusjanan avulla kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden molempien defekti on 0. Koska suorakulmaisten kolmioiden defekti on 0, niin apulauseen 5.4 perusteella kaikkien kolmioiden defekti on 0. Näin ollen kaikkien kolmioiden kulmien summa on  $180^\circ$ .  $\square$

**Seuraus 5.6.** *Missä tahansa neutraalin geometrian mallissa joko kaikkien kolmioiden kulmien summa on  $180^\circ$  tai kaikkien kolmioiden kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ .*

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 215]). Olkoon  $\triangle ABC$  kolmio. Jos  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , niin lauseen 5.5 mukaan kaikkien kolmioiden kulmien summa on  $180^\circ$ . Jos  $\angle A + \angle B + \angle C < 180^\circ$ , niin mallissa ei voi olla sellaista kolmiota, jonka kulmien summa on  $180^\circ$ . Jos tllainen kolmio olisi, niin lauseen 5.5 mukaan kaikkien kolmioiden kulmien summa olisi  $180^\circ$ , eikä voisi olla kolmiota, jonka kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ . Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että  $\angle A + \angle B + \angle C < 180^\circ$ . Mallissa ei voi olla myöskään kolmiota, jonka kulmien summa on enemmän kuin  $180^\circ$ , sillä se olisi ristiriidassa lauseen 5.3 kanssa. Siis joko kaikkien kolmioiden kulmien summa on  $180^\circ$  tai kaikkien kolmioiden kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ .  $\square$

Tämä seuraus osoittaa, että neutraalin geometrian mallit voidaan luokitella sen mukaan, mikä on niiden kolmion kulmien summa. Olemme jo aikaisemmin huomanneet, että euklidisen geometrian malleissa kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ . Seuraavassa luvussa tulemme näyttämään, että hyperbolisessa geometriassa kolmion kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ .

## 5.2 Hyperbolisen geometrian ominaisuudet

Hyperbolinen geometria on epäeuklidinen geometria eli siinä ei ole voimassa Eukleideen viides aksioma, yhdensuuntaisuusaksioma. Eukleideen neljä ensimmäistä aksiomaa sen sijaan pätevät hyperbolisessa geometriassa. Hyperbolisessa geometriassa on voimassa kaikki neutraalin geometrian ominaisuudet. Neutraalista geometriasta hyperbolisen geometrian erottaa se, että siinä oletetaan hyperbolinen yhdensuuntaisuusaksioma.

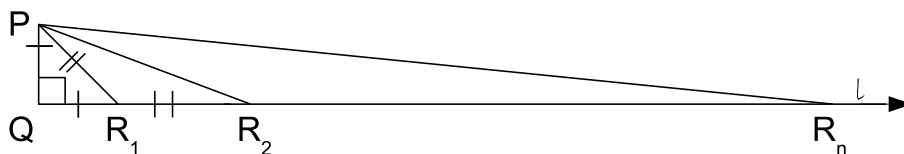
**Aksioma** (hyperbolinen yhdensuuntaisuusaksioma). *Olkoon  $l$  suora ja olkoon  $P$  mielivaltainen piste, joka ei ole suoralla  $l$ . Tällöin on olemassa vähintään kaksi eri suoraa  $l_1$  ja  $l_2$ , jotka molemmat kulkevat pisteen  $P$  kautta ja ovat yhdensuuntaisia suoran  $l$  kanssa.*

Seuraavassa lauseessa näytetään, että hyperbolisessa geometriassa kolmion kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ . Tämä ominaisuus myös havainnollistetaan myöhemmin kappaleessa 5.4. Lauseen todistamisen helpottamiseksi esitetään ensin apulauseita.

**Apulause 5.7.** Olkoon  $\angle PQR$  suora kulma ja olkoon  $a > 0$  positiivinen reaaliluku. Tällöin puolisuoralla  $QR$  on sellainen piste  $R_n$ , että

$$(\angle PR_nQ)^\circ < a^\circ.$$

*Todistus.* (Vrt. [5, s. 168, teht. 1]). Olkoon suora  $l$  pisteiden  $Q$  ja  $R$  määrittämä suora. Valitaan piste  $R_1$  suoralla  $l$  siten, että  $PQ \cong QR_1$ , jolloin kolmio  $\triangle PQR_1$  on tasakylkinen (ks. kuva 5.5). Koska  $\angle Q = 90^\circ$ , niin lauseen 5.3 mukaan  $\angle QPR_1 + \angle PR_1Q \leq 90^\circ$ . Koska kolmio on tasakylkinen, niin  $\angle PR_1Q \leq \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ . Seuraavaksi valitaan piste  $R_2$  suoralla  $l$  siten, että se on eri puolella pistettä  $R_1$  kuin piste  $Q$  ja  $PR_1 \cong R_1R_2$ . Tällöin kolmio  $\triangle PR_1R_2$  on tasakylkinen. Kulma  $\angle PR_1R_2$  on kulman  $\angle QR_1P$  supplementtikulmana suurempi tai yhtä suuri kuin  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ . Nyt  $\angle R_1PR_2 + \angle R_1R_2P \leq 45^\circ$  ja  $\angle PR_2Q \leq \frac{1}{4} \cdot 90^\circ = 22,5^\circ$ . Jatketaan kolmioiden muodostamista tällä tavalla valitsemalla pisteet  $R_3, R_4, \dots$  ja niin edelleen. Lopulta Arkhimedeeseen aksiooman perusteella löydetään sellainen piste  $R_n$ , että  $\angle PR_nQ \leq \frac{1}{2^n} \cdot 90^\circ < a^\circ$ .  $\square$

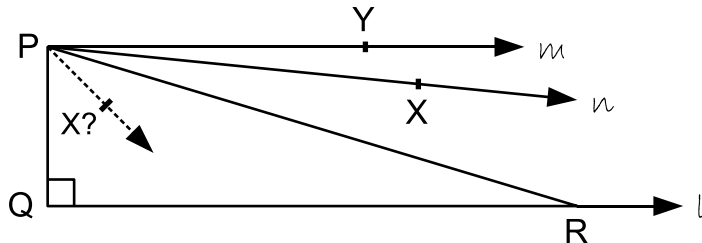


Kuva 5.5: Apulauseen 5.7 todistaminen.

**Apulause 5.8.** Hyperbolisessa geometriassa on olemassa kolmio  $\triangle ABC$ , jonka kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ .

*Todistus.* (Vrt. [5, s. 148]). Olkoon  $l$  suora ja olkoon  $P$  sellainen piste, ettei se ole suoralla  $l$ . Olkoon  $Q$  sellainen piste suoralla  $l$ , että jana  $PQ$  on kohtisuorassa suoraa  $l$  vastaan. Olkoon suora  $m$  sellainen pisteen  $P$  kautta kulkeva suoran  $l$  kanssa yhdensuuntainen suora, että se on kohtisuorassa janaa  $PQ$  vastaan. Olkoon piste  $Y$  suoralla  $m$ . Olkoon suora  $n$  toinen pisteen  $P$  kautta kulkeva suoran  $l$  kanssa yhdensuuntainen suora. Olkoon piste  $X$  sellainen suoran  $n$  piste, että se on samalla puolella pistettä  $P$  kuin  $Y$  ja puolisuora  $PX$  on janan  $PQ$  ja puolisuoran  $PY$  välissä (ks. kuva 5.6). Nyt apulauseen 5.7 perusteella suoralla  $l$  on sellainen piste  $R$ , joka on samalla puolella janaa  $PQ$  kuin pisteet  $X$  ja  $Y$  sekä  $\angle QRP < \angle XPY$ . Lisäksi jana  $PR$  on kulman  $\angle QPX$  sisäpuolella. Jos puolisuora  $PX$  olisi kulman  $\angle QPR$  sisällä, se leikkaisi janan  $QR$  eli suorat  $l$  ja  $n$  leikkaisivat toisensa. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Siis  $\angle RPQ < \angle XPQ$ . Täten, koska  $\angle XPQ + \angle XPY = \angle YPQ = 90^\circ$ , niin edellisistä epäyhtälöistä yhdistämällä

saadaan, että  $\angle QRP + \angle RPQ < 90^\circ$ . Siis kolmion  $\triangle QRP$  kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ .  $\square$



Kuva 5.6: Kolmio, jossa kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ .

**Lause 5.9.** *Hyperbolisessa geometriassa kaikkien kolmioiden asteluku on vähemmän kuin  $180^\circ$ .*

*Todistus.* (Vrt. [5, s. 150]). Apulauseen 5.8 perusteella hyperbolisessa geometriassa on olemassa kolmio  $\triangle ABC$ , jonka kulmien asteluku on vähemmän kuin  $180^\circ$ . Oletetaan, että on olemassa toinen kolmio  $\triangle DEF$ , jonka kulmien asteluku on  $180^\circ$ . Nyt lauseen 5.4 mukaan kaikkien kolmioiden kulmien summa on  $180^\circ$ , joka on ristiriidassa apulauseen 5.8 kanssa. Lauseen 5.3 perusteella kulmien summa ei voi olla suurempi kuin  $180^\circ$ . Näin ollen hyperbolisessa geometriassa kaikkien kolmioiden asteluku on vähemmän kuin  $180^\circ$ .  $\square$

**Seuraus 5.10.** *Hyperbolisessa geometriassa kaikkien konveksien nelikulmioiden asteluku on vähemmän kuin  $360^\circ$ .*

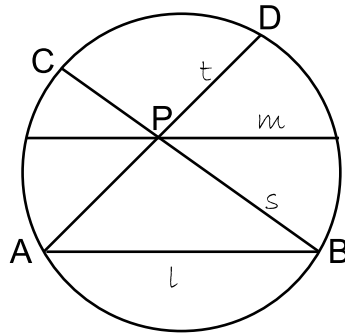
*Todistus.* (Vrt. [5, s. 150]). Olkoon  $ABCD$  konvekssi nelikulmio. Muodostetaan jana  $AC$ , joka jakaa nelikulmion kahdeksi kolmioksi  $\triangle ABC$  ja  $\triangle ACD$ . Nyt lauseen 5.9 perusteella näiden kolmioiden kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ . Koska nelikulmio  $ABCD$  on konvekssi, jana  $AC$  on sivujen  $AB$  ja  $AD$  välissä ja toisaalta myös sivujen  $CB$  ja  $CD$  välissä. Täten  $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$  ja  $\angle ACB + \angle ACD = \angle BCD$ . Nyt nelikulmion kulmien summa on sama kuin kolmioiden kulmien summat yhtenlaskettuna. Siis konveksin nelikulmion kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ .  $\square$

Yksinkertainen esimerkki hyperbolisesta geometriasta on niin sanottu satulapinta. Se on kaksiulotteinen, negatiivisesti kaareva pinta. Hyperbolisen geometrian hahmottamisen helpottamiseksi esitämme seuraavissa kappaleissa 5.3 ja 5.4 kaksi hyperbolisen geometrian mallia.

### 5.3 Kleinin–Beltramin kiekko

Esitellään nyt yksi hyperbolisen geometrian malleista, Kleinin–Beltramin kiekko. Mallin kehittivät Eugenio Beltrami [4, s. 650] ja Felix Klein [4, s. 767] 1800-luvun loppupuolella. Mallin avulla on helppo näyttää toteen hyperbolinen yhdensuuntaisuusaksioma, jonka mukaan suoralla on useita saman pisteen kautta kulkevia yhdensuuntaisia suoria.

Olkoon  $\Gamma_1$  ympyrä, jonka keskipiste on  $O$  ja säde on  $r > 0$ . Mallin pisteet ovat tavalliset euklidiset pisteet, jotka ovat ympyrän  $\Gamma_1$  sisäpisteitä. Siis ympyrän  $\Gamma_1$  kehän pisteet ja sen ulkopuoliset pisteet eivät ole mallin pisteitä. Täsmällisemmin mallin pisteet ovat sellaiset pisteet  $A$ , joille  $OA < r$ . Ympyrän  $\Gamma_1$  kehän pisteet  $A$  ja  $B$  määrittävät ympyrän janteen  $AB$ . Mallin suorat ovat jäniteitä  $AB$  ilman päätepisteitään  $A$  ja  $B$ . Mallin suora  $AB$  on euklidisen suoran  $AB$  ja ympyrän  $\Gamma_1$  sisäosan leikkaus. Mallin suorat leikkaavat toisensa korkeintaan yhdessä pisteessä ja kaksi mallin eri pistettä määrittää yksikäsitteisen mallin suoran.



Kuva 5.7: Suorat Kleinin–Beltramin kiekossa.

Olkoon  $l$  ympyrän  $\Gamma_1$  pisteiden  $A$  ja  $B$  määrittämä mallin suora. Olkoon  $P$  sellainen mallin piste, ettei se ole suoralla  $l$ . Pisteestä  $P$  kautta kulkeva mallin suora  $m$  on yhdensuuntainen suoran  $l$  kanssa, ellei niillä ole yhteisiä mallin pisteitä. Olkoot  $C$  ja  $D$  sellaiset ympyrän  $\Gamma_1$  pisteet, että suorat  $AD$  ja  $BC$  leikkaavat pisteessä  $P$ . Nyt myös mallin suorat  $s = BC$  ja  $t = AD$  ovat yhdensuuntaisia suoran  $l$  kanssa, koska  $A$  ja  $B$  eivät ole mallin pisteitä (ks. kuva 5.7). Sillä, että suorat leikkaavat toisensa ympyrän  $\Gamma_1$  ulkopuolella, ei ole merkitystä, sillä ympyrän ulkopuoliset pisteet eivät ole mallin pisteitä. Itse asiassa kaikki suorat, jotka kulkevat pisteen  $P$  kautta ja ovat sillä suorien  $s$  ja  $t$  väliin jäävällä alueella, että ne leikkaavat ympyrän pisteiden  $A$  ja  $C$  sekä pisteiden  $B$  ja  $D$  välissä, ovat yhdensuuntaisia suoran  $l$  kanssa. Tästä huomataan, että pisteen  $P$  kautta kulkevia suoria on tällä alueella monia. Näin on havainnollistettu, että suoran  $l$  kanssa yhdensuuntaisia suoria, jotka

kulkevat pisteen  $P$  kautta, on useita. Huomataan myös, että suoran  $l$  kanssa yhdensuuntaiset suorat eivät välttämättä ole keskenään yhdensuuntaisia.

**Esimerkki 5.1.** (vrt. [2, s. 221, teht. 6]). Eukleideen tasogeometriassa kolmella yhdensuuntaisella suoralla on yhteinen leikkaussuora. Näin ei välttämättä ole hyperbolisessa geometriassa. Annetaan tästä esimerkki Kleinin–Beltramin kiekossa. Olkoot  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ympyrän  $\Gamma_1$  kehän pisteitä. Nyt mallin suorat  $AB$ ,  $BC$  ja  $AC$  ovat kaikki keskenään yhdensuuntaisia, mutta niille ei ole mahdollista piirtää yhteistä leikkaussuoraa. Suorat muodostavat kolmion  $\triangle ABC$  ja ei ole mahdollista, että suora leikkaisi kaikki sen sivut. Suorille  $AB$ ,  $BC$  ja  $AC$  ei myöskään voida piirtää yhteistä kohtisuoraa. Eukleideen tasogeometriassa tällainen yhteinen kohtisuora löytyy aina yhdensuuntaisille suorille.

Kleinin–Beltramin kiekossa suorien väliset kulmat määritellään eri tavalla kuin euklidisessa geometriassa. Sivuutetaan kuitenkin tässä kulmien käsitteily, sillä se vaatisi laajaa lisätarkastelua. Seuraavassa kappaleessa esitettävässä mallissa kulmien tarkastelu on helpompaa.

## 5.4 Poincarén kiekko

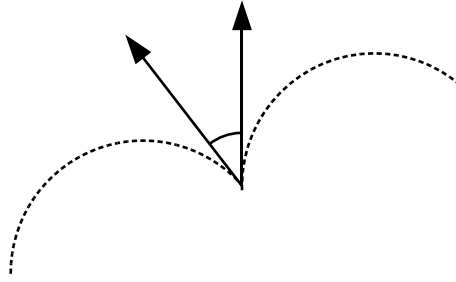
Esitellään nyt toinen hyperbolisen geometrian malli, Poincarén kiekko. Mallin kehitti Henri Poincaré [4, s. 835] 1800-luvun loppupuolella. Poincarén kiekko toteuttaa hyperbolisen yhdensuuntaisuusaksioman ja neljä Eukleideen ensimmäistä aksiomaa. Mallin avulla voidaan helposti havainnollistaa, että kolmion kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ .

Olkoon  $\Gamma_2$  ympyrä tasogeometriassa ja olkoon sen keskipiste  $O$ . Poincarén kiekossa pisteet ovat ympyrän  $\Gamma_2$  sisäpisteitä, kuten edellisessäkin mallissa. Suoria mallissa on kahdenlaisia. Ensiksi kaikki ympyrän halkaisijat ilman päätepisteitään ovat suoria. Toiseksi suoria ovat myös sellaiset ympyrän  $\Gamma_2$  sisäpuolella olevat ympyrän kaaret, jotka leikkaavat ympyrän  $\Gamma_2$  suorassa kulmassa, ilman leikkauspisteitä (ks. kuva 5.9). Nämä kaaret ovat ympyröiden, jotka leikkaavat ympyrän  $\Gamma_2$  suorassa kulmassa, ja ympyrän  $\Gamma_2$  sisäosan leikkaus. Halkaisijan muodostamaa suoraa voidaan ajatella ympyrän, jonka säde on ääretön, kaareksi.

Poincarén kiekossa kulmien suuruus lasketaan samalla tavalla kuin Euklidisessa geometriassa. Kahden ympyrän kaaren välinen kulma mitataan niiden leikkauspisteessä määritettyjen tangenttien välisenä kulmana (ks. kuva 5.8). Samoin kaaren ja suoran välinen kulma mitataan leikkauspisteessä kaaren tangentin ja suoran välisenä kulmana.

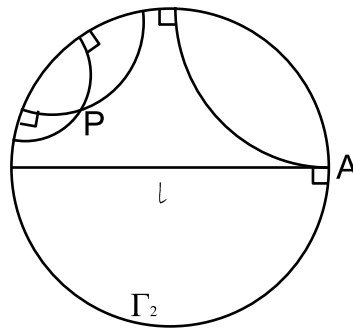
Suorat ovat yhdensuuntaisia, jos niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä. Esimerkiksi kaikki ympyrän  $\Gamma_2$  pisteestä  $A$  lähtevät mallin suorat ovat yhdensuuntaisia, sillä ympyrän piste  $A$  ei ole mallin piste. Kuvassa 5.9 on havainnollistettu, kuinka suoran  $l$  ulkopuolisen pisteen  $P$  kautta voidaan piirtää useita suoran  $l$  kanssa yhdensuuntaisia suoria. Täten Eukleideen yhden-





Kuva 5.8: Kaarien välinen kulma.

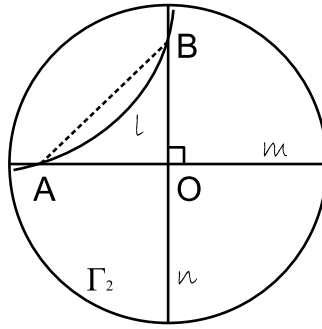
suuntaisuusaksioma ei ole voimassa, vaan malli noudattaa hyperbolisen geometrian yhdensuuntaisuusaksiomaa. Mallissa on mahdollista, että suoran  $l$  kanssa yhdensuuntaiset suorat  $m$  ja  $n$  eivät ole keskenään yhdensuuntaisia. Myös tässä mallissa kaksi pistettä määrittää yksikäsitteisen suoran.



Kuva 5.9: Yhdensuuntaiset suorat Poincarén kiekossa.

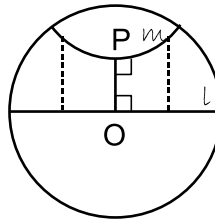
Muodostetaan nyt kolmio Poincarén kiekossa. Olkoot  $m$  ja  $n$  sellaisia suoria, että ne ovat ympyrän halkaisijoita ja ne leikkaavat toisensa ympyrän keskipisteessä  $O$  suorassa kulmassa. Olkoot  $A$  ja  $B$  suorien  $m$  ja  $n$  sellaiset pisteet, että  $OA \cong OB$ . Nyt pisteet  $A$  ja  $B$  määrittävät yksikäsitteisen suoran mallissa. Olkoon tämä suora  $l$ . Mallin suorat  $l$ ,  $m$  ja  $n$  muodostavat nyt kolmion (ks. kuva 5.10). Muodostetaan tavanomainen jana  $AB$ , jolloin saadaan euklidinen tasokolmio  $\triangle AOB$ , jonka kulmien summa on  $180^\circ$ . Tämä kolmio on suorakulmainen ja tasakylkinen, joten  $\angle BAO = \angle ABO = 45^\circ$ . Kuvasta 5.10 huomataan helposti, että pisteessä  $A$  suorien  $l$  ja  $m$  välinen kulma eli kaaren tangentin ja suoran  $m$  välinen kulma on pienempi kuin  $45^\circ$ , sillä tangentti on janojen  $AB$  ja  $AO$  välissä. Sama pätee suorien  $l$  ja  $n$  väliselle kulmalle. Koska suorien  $m$  ja  $n$  välinen kulma on  $90^\circ$ , niin suorien  $l$ ,  $m$  ja  $n$  muodostaman kolmion kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ .

**Esimerkki 5.2.** Eukleideen tasogeometriassa yhdensuuntaiset suorat ovat



Kuva 5.10: Kolmio Poincarén kiekossa.

kaikkiällä yhtä kaukana toisistaan. Tämä väite ei päde Poincarén kiekossa. Olkoon  $l$  pallon  $\Gamma_2$  halkaisija ja täten suora Poincarén kiekossa. Olkoon  $O$  pallon keskipiste. Olkoon  $m$  sellainen suora Poincarén kiekossa, että suorilla  $l$  ja  $m$  on yhteinen kohtisuora  $OP$ . Piste  $P$  on suoralla  $m$ . Nyt kuvasta 5.11 huomataan, kuinka suora  $m$  loittonee suorasta  $l$  pisteen  $M$  molemmin puolin.



Kuva 5.11: Yhdensuuntaiset suorat.

## 5.5 Etäisyys

Määritetään nyt esitellyissä hyperbolisen geometrian malleissa toimiva etäisyyden käsite. Lisäksi annetaan aiheesta havainnollistavia esimerkkejä.

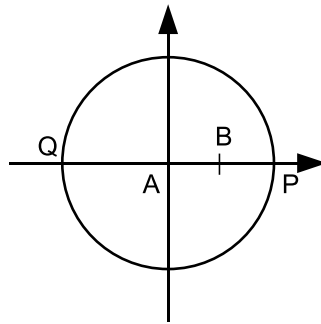
**Määritelmä 5.2.** (Vrt. [2, s. 221] ja [5, s. 199]). Olkoon  $P$  ja  $Q$  ympyrän  $\Gamma$  kehän pisteitä. Pisteet  $P$  ja  $Q$  määrittävät suoran  $PQ$ . Olkoot  $A$  ja  $B$  sellaiset pisteet suoralla  $PQ$ , että ne ovat pisteiden  $P$  ja  $Q$  välissä ja pisteiden järjestys on  $Q, A, B, P$ . Pisteiden  $A$  ja  $B$  hyperbolinen etäisyys on

$$d(A, B) = \left| \log \frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ} \right|.$$

Hyperbolinen etäisyys ei riipu pisteiden  $P$  ja  $Q$  järjestyksestä. Se ei myöskään riipu pisteiden  $A$  ja  $B$  järjestyksestä.

**Esimerkki 5.3.** (Vrt. [2, s. 221, teht. 7]). Olkoon  $\Gamma_1$  ympyrä  $x^2 + y^2 = 1$  Kleinin–Beltramin kiekkomallissa. Ympyrän  $\Gamma_1$  keskipiste on  $(0, 0)$  ja säde  $r = 1$ . Olkoon piste  $A = (0, 0)$  ja piste  $B = (\frac{1}{2}, 0)$ . Lasketaan etäisyys  $d(A, B)$ . Etsitään ensin sellaiset ympyrän  $\Gamma_1$  pisteet  $P$  ja  $Q$ , että pisteet  $A$  ja  $B$  ovat suoralla  $PQ$ . Eli pisteet  $Q = (-1, 0)$  ja  $P = (1, 0)$  (ks. kuva 5.12). Nyt pisteiden  $A$  ja  $B$  hyperbolinen etäisyys on

$$d(A, B) = \left| \log \frac{1 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 1} \right| = |\log 3| \approx 0,48.$$



Kuva 5.12: Esimerkki 5.3.

Määritetään nyt mallin sellaisen pisteen  $M$  koordinaatit, joka on mallin janan  $AB$  keskipiste. Siis piste  $M$  on sellainen, että  $d(A, M) = d(M, B)$ . Nyt

$$d(A, M) = d(M, B),$$

$$\left| \log \frac{AP \cdot MQ}{MP \cdot AQ} \right| = \left| \log \frac{MP \cdot BQ}{BP \cdot MQ} \right|.$$

Koska molemmat murtolausekkeet  $\frac{AP \cdot MQ}{MP \cdot AQ}$  ja  $\frac{MP \cdot BQ}{BP \cdot MQ}$  ovat suurempia kuin 1, niin itseisarvomerkit voidaan poistaa. Saadaan edelleen

$$\frac{AP \cdot MQ}{MP \cdot AQ} = \frac{MP \cdot BQ}{BP \cdot MQ},$$

$$AP \cdot MQ \cdot BP \cdot MQ = MP \cdot AQ \cdot MP \cdot BQ,$$

$$\frac{1}{2}(MQ)^2 = \frac{3}{2}(MP)^2,$$

$$(MQ)^2 = 3(MP)^2,$$

$$MQ = \sqrt{3}MP,$$

$$\frac{MQ}{MP} = \sqrt{3}.$$

Nyt koska  $PQ = 2$ , niin  $PM + MQ = 2$  ja  $MP = 2 - MQ$ . Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}\frac{MQ}{2 - MQ} &= \sqrt{3}, \\ MQ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3}MQ, \\ (1 + \sqrt{3})MQ &= 2\sqrt{3}, \\ MQ &= \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Toisaalta  $MQ = MA + AQ = MA + 1$  eli

$$MA = MQ - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \approx 0,27.$$

Siis piste  $M = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}, 0\right)$ .

Tämä esimerkki toimii myös Poincarén kiekossa, sillä suora  $PQ$  on ympyrän halkaisija ja siten suora myös Poincarén kiekossa.

**Esimerkki 5.4.** (Vrt. [2, s. 221, teht. 7]). Olkoot  $A$ ,  $B$  ja  $R$  Poincarén kiekon pisteitä, kaikki samalla mallin suoralla  $PQ$ .  $P$  ja  $Q$  ovat ympyrän  $\Gamma_2$  kehän pisteitä. Olkoon pisteiden järjestys  $Q, A, B, R, P$ . Osoitetaan nyt, että  $d(A, R) = d(A, B) + d(B, R)$ . Koska  $\log \frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ}$ ,  $\log \frac{BP \cdot RQ}{RP \cdot BQ}$  ja  $\log \frac{AP \cdot RQ}{AQ \cdot RP}$  ovat kaikki positiivisia, voidaan itseisarvomerkit jättää pois. Saadaan

$$\begin{aligned}d(A, B) + d(B, R) &= \log \frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ} + \log \frac{BP \cdot RQ}{RP \cdot BQ}, \\ &= \log \frac{AP \cdot BQ \cdot BP \cdot RQ}{BP \cdot AQ \cdot RP \cdot BQ}, \\ &= \log \frac{AP \cdot RQ}{AQ \cdot RP}, \\ &= d(A, R).\end{aligned}$$

**Esimerkki 5.5.** (Vrt. [2, s. 221, teht. 7]). Olkoot  $A$  ja  $B$  pisteitä Poincarén kiekon suoralla  $PQ$ , jossa  $P$  ja  $Q$  ovat ympyrän  $\Gamma_2$  kehän pisteitä. Olkoon pisteiden järjestys suoralla  $Q, A, B, P$ . Kiinnitetään piste  $A$  mielivaltaiseen kohtaan suoralla. Ajatellaan nyt tilannetta, jossa piste  $B$  liikkuu kohti pistettä  $P$ . Tällöin

$$d(A, B) = \left| \log \frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ} \right| = \left| \log \left( \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP} \right) \right|.$$

Koska piste  $A$  on kiinnitetty, on  $\frac{AP}{AQ}$  aina vakio. Merkitään  $\frac{AP}{AQ} = k$ . Nyt

$$d(A, B) = \left| \log \frac{k \cdot BQ}{BP} \right|$$

ja

$$\left| \log \frac{k \cdot BQ}{BP} \right| \rightarrow \left| \log \frac{2k}{0} \right| = \infty, \quad \text{kun } B \rightarrow P.$$

Siis

$$d(A, B) \rightarrow \infty, \quad \text{kun } B \rightarrow P.$$

Tämä esimerkki pätee myös Kleinin–Beltramin kiekossa. Esimerkistä huomataan, että mallien minkä tahansa pisteen hyperbolinen etäisyys ympyrän kehästä on ääretön.

Hyperbolisen etäisyyden perusteella voidaan määritellä myös janojen yhtenevyys esitetyissä malleissa. Janat  $AB$  ja  $CD$  ovat *yhtenevät*, jos  $d(A, B) = d(C, D)$  [5, s. 200]. Tällöin merkitään  $AB \cong CD$ .

## 5.6 Yhtenevät kolmiot

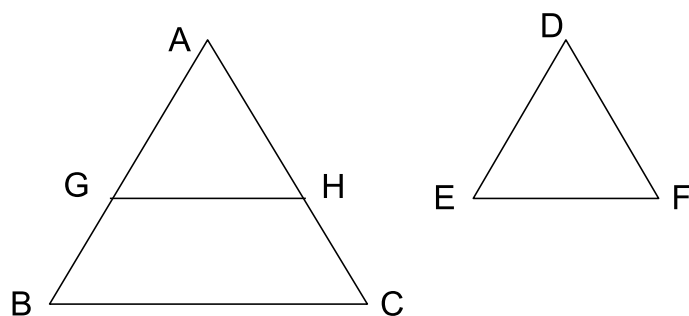
Hyperbolisessa geometriassa ja pallogeometriassa on monia samankaltaisuuksia. Yksi näistä on kolmion kulmien summa, johon hyperbolisessa geometriassa liittyy defekti ja pallogeometriassa palloylimäärä. Toinen samankaltaisuus löytyy kolmioiden yhtenevyydestä. Nimittäin (kkk) on yhtenevyyslause pallogeometrian tapaan myös hyperbolisessa geometriassa. Hyperbolisessa geometriassa pätee myös Eukleideen tasogeometriasta tutut yhtenevyyslauseet (sks), (ksk) ja (sss).

**Lause 5.11** (yhtenevyyslause (kkk) hyperbolisessa geometriassa). *Olko*ot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  *kolmioita hyperbolisessa geometriassa. Oletetaan lisäksi, että*  $\angle A \cong \angle D$ ,  $\angle B \cong \angle E$  ja  $\angle C \cong \angle F$ . *Tällöin*  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

*Todistus.* (Vrt. [2, s. 219]) Jos kolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  yhdet sivut ovat yhtä pitkät, seuraa suoraan yhtenevyyslauseesta (ksk), että kolmiot ovat yhtenevät. Oletetaan siis, että kolmioiden sivut eivät ole yhtä pitkät. Oletetaan, että  $AB > DE$ . Tällöin on joko  $AC > DF$  tai  $AC < DF$ .

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa  $AB > DE$  ja  $AC < DF$ . Tällöin kolmioiden yhdenmuotoisuus ei säily ja  $\angle B \neq \angle E$  ja  $\angle C \neq \angle F$ . Tästä seuraa ristiriita oletuksen kanssa. Siis ei voi olla  $AB > DE$  ja  $AC < DF$ .

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa  $AB > DE$  ja  $AC > DF$ . Nyt löydetään sellaiset pisteet  $G$  janalla  $AB$  ja  $H$  janalla  $AC$ , että  $AG = DE$  ja  $AH = DF$  (ks. kuva 5.13). Käytetään yhtenevyyslauseetta (sks) ja saadaan, että  $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ . Koska  $\angle AGH = \angle E = \angle B$  ja  $\angle AHG = \angle F = \angle C$ , niin pitää olla  $\angle HGB + \angle B = 180^\circ$  ja  $\angle GHC + \angle C = 180^\circ$ . Nyt  $GBCH$  on konvekssi nelikulmio, jonka kulmien summa on  $360^\circ$ . Tämä on kuitenkin ristiriidassa seurauslauseen 5.10 kanssa. Täten ei voi olla myöskään  $AB > DE$  ja  $AC > DF$ , joten on oltava  $AB = DE$  ja  $AC = DF$ . Vastaavasti saadaan todistettua sivujen  $BC$  ja  $EF$  yhtäsuuruus.  $\square$



Kuva 5.13: Lauseen 5.11 todistaminen.

Tästä lauseesta seuraa, että yhdenmuotoisuuslause (kk) ei ole voimassa hyperbolisessa geometriassa. Itse asiassa hyperbolisessa geometriassa ei ole ollenkaan yhdenmuotoisia kolmioita.

## 5.7 Poincarén puolitaso

Esitellään vielä yksi hyperbolisen geometrian malli, Poincarén puolitaso. Myös tämän mallin on kehittänyt Henri Poincaré [4, s. 835]. Malli toteuttaa hyperbolisen yhdensuuntaisuusaksiooman ja Eukleideen neljä ensimmäistä aksioomaa. Kerrataan ensin kompleksilukujen esitys.

Kompleksiluku voidaan esittää karteesisessa  $xy$ -koordinaatistossa, jolloin  $z = x + iy$ . Kompleksilukujen esitystä tasossa sanotaan kompleksitasoksi, jonka määrittelevät reaaliakseli ja imaginaariakseli. Poincarén puolitaso on reaaliakselin yläpuolella oleva joukko pisteitä

$$\mathcal{H} = \{x + iy : y > 0\}.$$

Lisäksi kaaren pituus määritellään siinä seuraavan kaavan avulla

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Tämä on mallin koko määritelmä. Seuraavat kappaleet pitävät sisällään mallin yksityiskohtaisempaa tarkastelua. Selvitetään seuraavaksi millaisia mallin suorat ovat.

## 5.8 Pystysuorat viivat

Olkoon  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  paloittain määritelty jatkuvasti derivoituva käyrä pisteestä  $\mathbf{x}(t_0)$  pisteeseen  $\mathbf{x}(t_1)$ . Muistutetaan mieleen, että euklidisen geometrian käyrän pituudelle pätee  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Tällöin käyrän pituus

saadaan kaavasta

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Oletetaan nyt, että  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  on kaari Poincarén puolitasossa. Kaaren pituus lasketaan Poincarén puolitasossa kaavalla

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt.$$

Tarkastellaan nyt käyrää

$$\mathbf{x}(y) = (x_0, y) \quad y \in [y_0, y_1].$$

Tämä on pystysuora jana pisteestä  $(x_0, y_0)$  pisteeseen  $(x_0, y_1)$ . Tämän käyrän kaaren pituus Poincarén puolitasossa on

$$s = \int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{y} dy = \ln y_1 - \ln y_0 = \ln(y_1/y_0).$$

Tarkastellaan vielä paloittain määriteltyä jatkuvasti derivoituvaa käyrää  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ , jossa  $\mathbf{x}(t_0) = (x_0, y_0)$  ja  $\mathbf{x}(t_1) = (x_0, y_1)$ . Tämä käyrä siis alkaa pisteestä  $(x_0, y_0)$  ja päättyy pisteeseen  $(x_0, y_1)$ , kuten edellä tarkasteltu käyräkin. Oletetaan, että  $y(t)$  on kasvava funktio. Nyt kaaren pituudesta saadaan

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \\ &\geq \int_{y(t_0)}^{y(t_1)} \frac{1}{y} dy, \\ &\geq \ln y(t_1) - \ln y(t_0). \end{aligned}$$

Tästä huomataan, että käyrä on pidempi Poincarén puolitason kaaren pituudella mitattuna kuin pisteet yhdistävä pystysuora jana. Näin ollen pisteiden lyhin etäisyys on pystysuora jana. Täten pystysuorat janat ovat suorita Poincarén puolitasossa.

**Esimerkki 5.6.** (Vrt. [1, s. 133, teht. 1]) Lasketaan pisteiden  $3 + i$  ja  $3 + 5i$  etäisyys Poincarén puolitasossa. Nyt

$$\mathbf{x}(y) = (3, y) \quad y \in [1, 5].$$

Kaaren pituus eli pisteiden etäisyys on

$$s = \int_1^5 \frac{4}{y} dy = 4(\ln 5 - \ln 1) \approx 6,44.$$

## 5.9 Yhtenevyyskuvaus

Tarkka määritelmä yhtenevyyskuvauksesta on annettu kappaleessa 3. Yhtenevyyskuvaus eli isometria on kuvaus, joka säilyttää pituudet. Itse asiassa se säilyttää kaaren pituudet. Tarkastellaan nyt kaaren pituuksia yhtenevyyskuvauksen lajeissa.

Kaaren pituus määritellään Eukleideen tasogeometriassa kaavasta

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Todistetaan, että se säilyy kierrossa kulman  $\theta$  verran origon ympäri.

$$\mathbf{R}(x, y) = (\mathbf{u}(x, y), \mathbf{v}(x, y)) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Näytetään nyt, että  $d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{v}^2 = dx^2 + dy^2$ .

$$\begin{aligned} d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{v}^2 &= (\cos \theta dx - \sin \theta dy)^2 + (\sin \theta dx + \cos \theta dy)^2, \\ &= \cos^2 \theta dx^2 + 2 \cos \theta \sin \theta dx dy + \sin^2 \theta dy^2 \\ &\quad + \sin^2 \theta dx^2 + 2 \sin \theta \cos \theta dx dy + \cos^2 \theta dy^2, \\ &= dx^2 + dy^2. \end{aligned}$$

Näin saatiin todistettua, että kaaren pituus säilyy kierrossa kulman  $\theta$  verran origon ympäri.

Vastaavasti sen todistamiseksi, että kuvaus Poincarén puolitasossa on yhtenevyyskuvaus, pitää todistaa, että se säilyttää Poincarén kaaren pituuden, joka siis eroaa Eukleideen tasogeometriasta vastaavasta. Tämä tarkoittaa, että kuvauksessa

$$(\mathbf{u}(x, y), \mathbf{v}(x, y))$$

pitää päteä

$$\frac{d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Eukleideen tasogeometriasta yhtenevyyskuvaukset eivät siis välttämättä ole yhtenevyyskuvauksia Poincarén puolitasossa. Vaakasuora siirto janan  $a$  verran

$$T_a(x, y) = (\mathbf{u}(x, y), \mathbf{v}(x, y)) = (x + a, y)$$

on yhtenevyyskuvaus Poincarén puolitasossa. Voidaan tarkastaa kaaren pituuden säilyminen

$$\frac{d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2} = \frac{d(x + a)^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Huomaa, että sana vaakasuora viittaa euklidisen geometriaan. Sitä voidaan käyttää erityisesti tässä mallissa, ei yleisesti hyperbolisessa geometriassa. Toinen selvästi yhtenevyyskuvaus Poincarén puolitasossa on peilaus pystysuoran  $x = b$  yli

$$R_b(x, y) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (2b - x, y).$$



**Esimerkki 5.7.** (Vrt. [1, s. 135, teht. 3]). Näytetään, että homotetia

$$f_h(x, y) = (\mathbf{u}(x, y), \mathbf{v}(x, y)) = (kx, ky)$$

on yhtenevyyskuvaus Poincarén puolitasossa osoittamalla, että se säilyttää kaaren pituuden. Nyt

$$\frac{d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2} = \frac{k^2 dx^2 + k^2 dy^2}{k^2 y^2} = \frac{k^2(dx^2 + dy^2)}{k^2 y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Siis homotetia on yhtenevyyskuvaus Poincarén puolitasossa.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvausta, joka ei Eukleideen tasogeometriassa ole yhtenevyyskuvaus. Tämä kuvaus on peilaus yksikköympyrän suhteen

$$\phi(x, y) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Poincarén puolitasossa tämä kuvaus kuitenkin on yhtenevyyskuvaus. Todistetaan tämä näyttämällä, että kuvaus säilyttää Poincarén puolitason kaaren pituuden. (Vrt. [1, s. 134]). Merkintöjen helpottamiseksi merkitään  $r^2 = x^2 + y^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2} &= \frac{r^4}{y^2} \left( \left( \frac{r^2 dx - 2x^2 dx + 2xy dy}{r^4} \right)^2 + \left( \frac{r^2 dy - 2xy dx + 2y^2 dy}{r^4} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{((y^2 - x^2) dx - 2xy dy)^2 + ((x^2 - y^2) dy - 2xy dx)^2}{r^4} \right) \\ &= \frac{1}{y^2 r^4} ((y^2 - x^2)^2 dx^2 - 4(y^2 - x^2)xy dx dy + (2xy)^2 dy^2 \\ &\quad + (x^2 - y^2)^2 dy^2 - 4(x^2 - y^2)xy dx dy + (2xy)^2 dx^2) \\ &= \frac{1}{y^2 r^4} ((y^4 - 2x^2 y^2 + x^4 + 4x^2 y^2) dx^2 \\ &\quad + (x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + 4x^2 y^2) dy^2) \\ &= \frac{r^4(dx^2 + dy^2)}{y^2 r^4} \\ &= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Siis peilaus yksikköympyrän suhteen on yhtenevyyskuvaus Poincarén puolitasossa.

Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan perusteellisemmin tätä yhtenevyyskuvausta.

## 5.10 Inversio

Inversio on peilaus ympyrän suhteen ja sitä sanotaan myös ympyräpeilaukseksi. Tässä kappaleessa osoitetaan, että euklidisen suoran peilaus yksikköympyrän suhteen on joko suora tai ympyrä. Vastaavasti ympyrän peilaus yksikköympyrän suhteen on suora tai ympyrä. Aloitetaan inversion määrittelyllä.

**Määritelmä 5.3.** (Vrt. [9, s. 104]). Merkitään Eukleideen tasoa kirjaimella  $\varepsilon$ . Olkoon  $\Gamma$  ympyrä, jonka keskipiste on  $O$  ja säde on  $r$ . Jos piste  $P \neq O$ , niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen piste  $P'$ , että  $OP \cdot OP' = r^2$ . Kuvaus  $f_\Gamma : \varepsilon \setminus \{O\} \rightarrow \varepsilon \setminus \{O\}$ ,  $f_\Gamma(P) = P'$ , on *inversio* eli *ympyräpeilaus* ympyrän  $\Gamma$  suhteen. Sanotaan, että  $P'$  on pisteen  $P$  *inversiopiste*.

**Lause 5.12.** (Vrt. [9, s. 104]). Olkoon  $\Gamma$  ympyrä, jonka keskipiste on  $O$  ja säde on  $r$ . Tällöin inversio  $f_\Gamma$  kuvaa ympyrän  $\Gamma$  sisäpuolen sen ulkopuoleksi ja ulkopuolen sen sisäpuoleksi.

*Todistus.* Tarkastellaan ensin tapausta, jossa piste  $P$  on ympyrän  $\Gamma$  sisäpuolella. Tällöin  $OP < r$ . Inversion määrittelyn mukaan  $OP \cdot OP' = r^2$  eli  $OP' = \frac{r^2}{OP}$ . Nyt koska  $OP < r$ , niin  $\frac{r^2}{OP} > r$ . Siis  $OP' > r$ , josta seuraa, että piste  $P'$  on ympyrän  $\Gamma$  ulkopuolella. Näin ollen inversio  $f_\Gamma$  kuvaa ympyrän  $\Gamma$  sisäpuolen sen ulkopuoleksi.

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa piste  $P$  on ympyrän  $\Gamma$  ulkopuolella. Tällöin  $OP > r$ , joten  $\frac{r^2}{OP} < r$ . Siis  $OP' < r$ , jolloin piste  $P'$  on ympyrän  $\Gamma$  sisäpuolella. Näin ollen inversio  $f_\Gamma$  kuvaa ympyrän  $\Gamma$  ulkopuolen sen sisäpuoleksi.  $\square$

**Esimerkki 5.8.** (Vrt. [9, s. 105, probleema 9]). Olkoon  $\Gamma$  ympyrä, jonka keskipiste on  $O$  ja säde on  $r$ . Määritetään pisteen  $P \neq O$  inversiopiste ympyrän  $\Gamma$  suhteen.

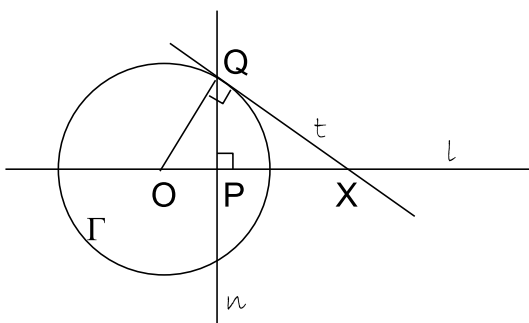
Tarkastellaan tilannetta, jossa piste  $P$  on ympyrän  $\Gamma$  sisäpuolella. Sivutetaan tilanne, jossa piste  $P$  on ympyrän  $\Gamma$  ulkopuolella. (Katso esimerkiksi [5, s. 196].) Olkoon  $l$  suora, joka kulkee pisteiden  $O$  ja  $P$  kautta. Olkoon suora  $n$  suoran  $l$  pisteeseen  $P$  piirretty normaali (ks. kuva 5.14). Koska normaali kulkee ympyrän  $\Gamma$  sisäpuolelta, se myös leikkaa ympyrän. Olkoon tämä leikkauspiste  $Q$ . Olkoon suora  $t$  ympyrän  $\Gamma$  tangentti pisteessä  $Q$ . Olkoon  $X$  suorien  $t$  ja  $l$  leikkauspiste. Koska kulmat  $\angle OQX$  ja  $\angle OPQ$  ovat suoria kulmia ja kolmioilla  $\triangle OPQ$  ja  $\triangle OQX$  on yhteinen kulma  $\angle O$ , niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset,  $\triangle OPQ \sim \triangle OQX$ . Nyt niiden sivut ovat verrannolliset, joten

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{OX},$$
$$\frac{OP}{r} = \frac{r}{OX}$$

eli

$$OP \cdot OX = r^2.$$

Näin ollen piste  $X$  on haluttu piste, eli  $X = P'$ .



Kuva 5.14: Piste  $P$  inversiopisteen määrittäminen.

Edellisessä kappaleessa tarkastellussa ympyräpeilauksessa  $\phi(x, y) = (u, v) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$  oli  $r = 1$  ja  $O = 0$ , eli tarkasteltiin ympyräpeilausta yksikköympyrän suhteen. Tällöin  $OP' = \frac{r^2}{OP} = \frac{1}{OP}$ . Seuraavissa lauseissa käytetään myös ympyräpeilausta yksikköympyrän suhteen. Merkitään yksikköympyrää  $\Gamma_0$ .

**Lause 5.13.** *Olkkoon  $\Gamma_0$  yksikköympyrä, jonka keskipiste on  $O$ . Olkkoon  $l$  suora, joka ei kulje pisteen  $O$  kautta. Tällöin suoran  $l$  peilaus yksikköympyrän  $\Gamma_0$  suhteen on origon kautta kulkeva ympyrä.*

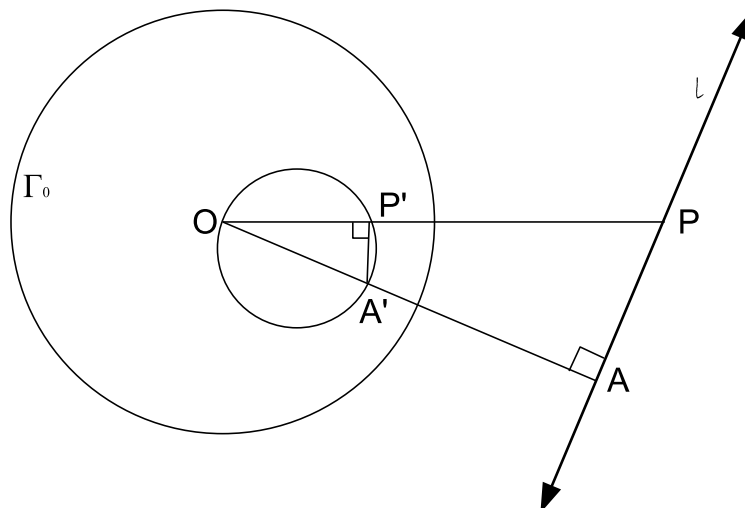
*Todistus.* (vrt. [1, s. 135]). Olkkoon  $l$  sellainen suora, että se ei leikkaa yksikköympyrää  $\Gamma_0$ . Olkkoon  $A$  sellainen piste suoralla  $l$ , että jana  $OA$  on kohtisuorassa suoraa  $l$  vastaan (ks. kuva 5.15). Olkkoon janan  $OA$  pituus  $a$  ja olkkoon  $A'$  sellainen janan  $OA$  piste, että janan  $OA'$  pituus on  $\frac{1}{a}$ . Muodostetaan nyt ympyrä, jonka halkaisija on  $OA'$ . Todistetaan, että tämä ympyrä on suoran  $l$  peilaus yksikköympyrän suhteen. Olkkoon  $P$  mielivaltainen piste suoralla  $l$  ja olkkoon janan  $OP$  pituus  $p$ . Olkkoon  $P'$  janan  $OP$  ja ympyrän, jonka halkaisija on jana  $OA$ , leikkauspiste. Merkitään, että janan  $OP'$  pituus on  $x$ . Nyt muodostuu kaksi kolmiota  $\triangle OAP$  ja  $\triangle OP'A'$ . Kulma  $\angle OP'A'$  on lauseen 3.1 mukaan suora kulma. Koska kolmiot  $\triangle OAP$  ja  $\triangle OP'A'$  ovat molemmat suorakulmaisia ja niillä on yhteinen kulma  $\angle O$ , niin yhdenmuotoisuuslauseen (kk) perusteella  $\triangle OAP \sim \triangle OP'A'$ . Koska yhdenmuotoisten

kolmioiden vastinsivut ovat verrannolliset, niin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{OP'}{OA'} &= \frac{OA}{OP}, \\ \frac{x}{1/a} &= \frac{a}{p}, \\ x &= \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Täten piste  $P'$  on pisteen  $P$  peilaus yksikköympyrän  $\Gamma_0$  suhteen. Siis suoran  $l$  peilaus yksikköympyrän suhteen on origon kautta kulkeva ympyrä.

Sivuutetaan tapaus, jossa suora  $l$  leikkaa yksikköympyrän  $\Gamma_0$ . Tällöin yksikköympyrän sisään jäävä osuus suorasta  $l$  kuvautuu ympyrän kaareksi yksikköympyrän ulkopuolelle. Muutoin todistus noudattelee samoja piirteitä.  $\square$



Kuva 5.15: Suoran peilaus yksikköympyrän suhteen.

Lauseesta seuraa, että origon  $O$  kautta kulkeva ympyrä kuvautuu suoraksi, joka on kohtisuorassa sitä ympyrän  $\Gamma_0$  halkaisijaa vastaan, jonka toinen päätepiste on  $O$ .

**Lause 5.14.** *Olkoon  $\Gamma_0$  yksikköympyrä, jonka keskipiste on  $O$ . Olkoon  $\Gamma$  sellainen ympyrä, että se ei kulje origon kautta. Tällöin ympyrän  $\Gamma$  peilaus yksikköympyrän suhteen on ympyrä.*

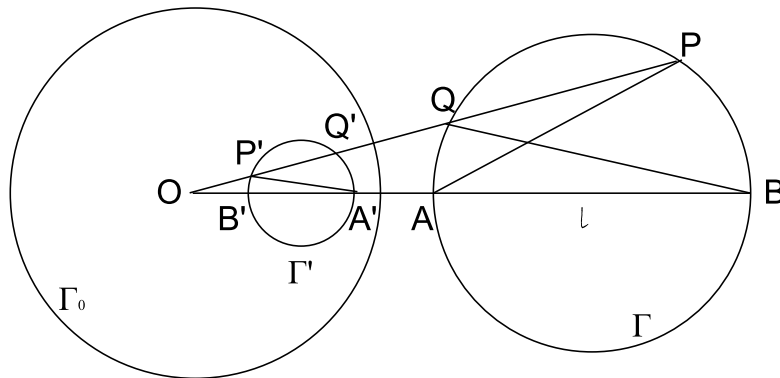
*Todistus.* (Vrt. [1, s. 136]). Olkoon  $\Gamma$  ympyrä, joka ei leikkaa yksikköympyrää  $\Gamma_0$ . Sivuuutetaan tapaus, jossa  $\Gamma$  leikkaa yksikköympyrän  $\Gamma_0$ . (Katso esimerkiksi [9, s. 105-106].) Olkoon  $l$  sellainen suora, että se kulkee sekä origon

että ympyrän  $\Gamma$  keskipisteen kautta ja leikkaa ympyrän  $\Gamma$  pisteissä  $A$  ja  $B$  (ks. kuva 5.16). Olkoon janan  $OA$  pituus  $a$  ja janan  $OB$  pituus  $b$ . Olkoon  $\Gamma'$  ympyrän  $\Gamma$  homotetia, jonka keskus on  $O$  ja suhde on  $1/ab$ . Merkitään  $f_h(\Gamma) = \Gamma'$ . Todistetaan, että  $\Gamma'$  on ympyrän  $\Gamma$  peilaus yksikköympyrän suhteen eli  $f_{\Gamma_0}(\Gamma) = \Gamma'$ .

Olkoot  $f_h(A) = B'$  ja  $f_h(B) = A'$ . Nyt  $\frac{OA'}{OB} = \frac{1}{ab}$  ja  $\frac{OB'}{OA} = \frac{1}{ab}$ . Janan  $OA'$  pituus on siis  $\frac{1}{ab}b = \frac{1}{a}$ , joten  $A'$  on pisteen  $A$  peilaus yksikköympyrän suhteen. Vastaavasti piste  $B'$  on pisteen  $B$  peilaus yksikköympyrän suhteen. Olkoon nyt suora  $l'$  mielivaltainen suora, joka kulkee origon kautta ja leikkaa ympyrän  $\Gamma$  pisteissä  $P$  ja  $Q$ . Olkoot  $f_h(P) = Q'$  ja  $f_h(Q) = P'$ . Todistetaan, että piste  $P'$  on pisteen  $P$  peilaus yksikköympyrän suhteen. Kolmiot  $\triangle OA'P'$  ja  $\triangle OBQ$  ovat yhdenmuotoiset, sillä  $f_h(O) = O$ ,  $f_h(B) = A'$  ja  $f_h(Q) = P'$ . Nyt lauseen 3.2 perusteella  $\angle QBA = \angle QPA$ . Täten kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseen (kk) perusteella kolmiot  $\triangle OBQ$  ja  $\triangle OPA$  ovat yhdenmuotoiset. Tällöin  $\angle OA'P' = \angle OBQ = \angle ABQ = \angle APQ$ . Nyt myös kolmiot  $\triangle OA'P'$  ja  $\triangle OPA$  ovat yhdenmuotoiset yhdenmuotoisuuslauseen (kk) perusteella. Koska yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivut ovat verrannolliset, saadaan

$$\begin{aligned}\frac{OA'}{OP} &= \frac{OP'}{OA}, \\ \frac{1/a}{OP} &= \frac{OP'}{a}, \\ OP' &= \frac{1}{OP}.\end{aligned}$$

Tämän perusteella piste  $P'$  on pisteen  $P$  peilaus yksikköympyrän suhteen, joten ympyrä  $\Gamma'$  on ympyrän  $\Gamma$  peilaus yksikköympyrän suhteen.  $\square$



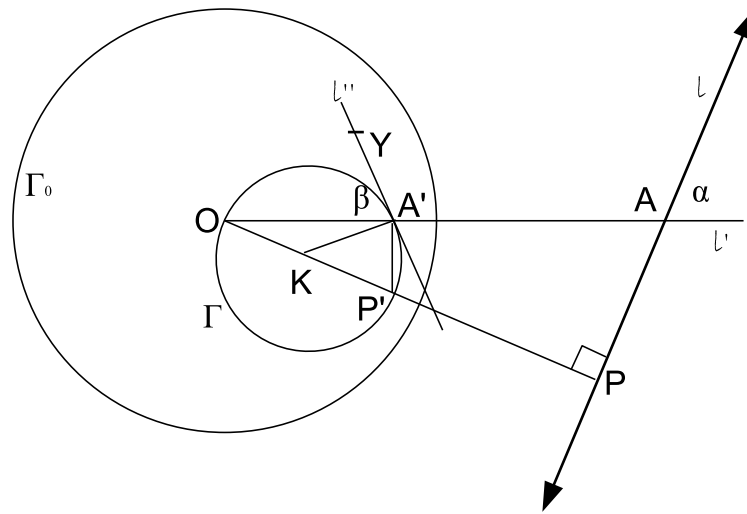
Kuva 5.16: Ympyrän peilaus yksikköympyrän suhteen.

Ympyräpeilaus ei ole yhtenevyyskuvaus Eukleideen tasogeometriassa, sillä se voi kuvata suoran ympyräksi ja päinvastoin. Edellisessä kappaleessa kuitenkin todistettiin, että ympyräpeilaus yksikköympyrän suhteen on yhtenevyyskuvaus Poincarén puolitasossa.

Seuraavassa lauseessa tarvitaan ympyröiden välistä kulmaa. Se mitataan ympyröiden leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välisenä kulmana. Lause osoittaa, että ympyräpeilauksessa suorien ja ympyröiden väliset kulmat pysyvät samoina.

**Lause 5.15.** *Peilaus yksikköympyrän suhteen säilyttää kulmien suuruudet.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 137]) Olkoon  $\Gamma_0$  yksikköympyrä, jonka keskipiste on  $O$ . Olkoon  $l$  suora, joka ei leikkaa yksikköympyrää. Olkoon  $l'$  pisteen  $O$  kautta kulkeva suora. Kulma  $\alpha$  on suorien  $l$  ja  $l'$  välinen kulma leikkauspisteessä  $A$  (ks. kuva 5.17). Olkoon  $P$  sellainen suoran  $l$  piste, että jana  $OP$  on kohtisuorassa suoraa  $l$  vastaan. Tällöin  $f_{\Gamma_0}(P) = P'$ , josta seuraa, että suoran  $l$  peilaus yksikköympyrän suhteen on ympyrä  $\Gamma$ , jonka halkaisija on jana  $OP'$ . Olkoon ympyrän  $\Gamma$  keskipiste  $K$ . Pisteen  $A$  peilaus yksikköympyrän suhteen on piste  $A'$ , joka on ympyrän  $\Gamma$  ja suoran  $l'$  leikkauspiste. Olkoon  $l''$  ympyrän  $\Gamma$  tangentti pisteessä  $A'$ . Tällöin tangentin  $l''$  ja suoran  $l'$  väliselle kulmalle  $\beta$  on  $f_{\Gamma_0}(\alpha) = \beta$ . Todistetaan vielä, että  $\beta = \alpha$ .



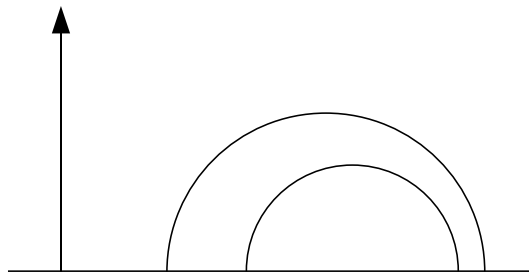
Kuva 5.17: Kulmien suuruuden säilyminen.

Kolmiot  $\triangle OAP$  ja  $\triangle OP'A'$  ovat yhdenmuotoiset, sillä molemmat ovat suorakulmaisia kolmioita ja niillä on yhteinen kulma  $\angle O$ . Tämän perusteella  $\angle A'P'O = \angle OAP = \alpha$ . Olkoon  $Y$  sellainen suoran  $l''$  piste, että se on samalla puolella suoran normaalia  $A'K$  kuin piste  $O$ . Nyt koska  $KA' = KO$ , niin  $\angle O = \angle OA'K$ . Tällöin  $\angle KA'Y = \angle YA'O + \angle OA'K = \beta + \angle O = 90^\circ$ .

Toisaalta kolmion  $\triangle OP'A'$  kulmien summasta saadaan  $\alpha + \angle O = 90^\circ$ . Siis  $\beta = \alpha$ . Täten peilaus yksikköympyrän suhteen säilyttää kulmien suuruuden.  $\square$

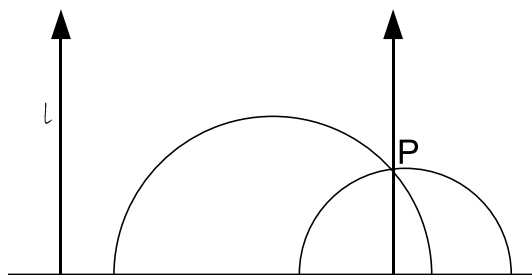
**Seuraus 5.16.** *Poincarén puolitason suorat ovat  $x$ -akselin yläpuolella olevia, joko sitä vastaan kohtisuorassa olevia pystysuoria tai puoliympyröitä, joiden keskipiste on  $x$ -akselilla.*

*Todistus.* (Vrt. [1, s. 137-138]). Olkoot  $P$  ja  $Q$  mielivaltaiset pisteet Poincarén puolitasossa  $\mathcal{H}$ . Olkoon  $\Gamma$  ympyrä, joka kulkee pisteiden  $P$  ja  $Q$  kautta ja jonka keskipiste  $K$  on  $x$ -akselilla. Olkoot  $M$  ja  $N$  ympyrän  $\Gamma$  ja  $x$ -akselin leikkauspisteet. Muodostetaan kuvaus  $\varphi$ , joka on yhdistetty kuvaus, jossa tehdään ensin vaakasuora siirto janan  $MO$  verran ja sen jälkeen peilaus yksikköympyrän suhteen. Kuvaus  $\varphi$  on kahden yhtenevyyskuvauksen yhdistettynä kuvauksena yhtenevyyskuvaus. Nyt piste  $M$  kuvautuu ensin origoon, pisteeksi  $O$  siirrossa ja sen jälkeen kohti ääretöntä peilauksessa yksikköympyrän suhteen. Nyt lauseen 5.13 mukaan puoliympyrä  $\Gamma$  kuvautuu suoraksi. Koska ympyrän keskipiste on  $x$ -akselilla, niin ympyrä leikkaa  $x$ -akselin suorassa kulmassa. Koska yhtenevyyskuvauksessa kulmien suuruudet säilyvät, kuvautuu ympyrä  $\Gamma$  pystysuoraksi. Pystysuorat ovat suoria Poincarén puolitasossa ja yhtenevyyskuvaukset säilyttävät kaaren pituudet. Tästä seuraa, että  $\Gamma$  on Poincarén puolitason suora, joka kulkee pisteiden  $P$  ja  $Q$  kautta.  $\square$



Kuva 5.18: Suorat Poincarén puolitasossa.

Suorat Poincarén puolitasossa ovat  $x$ -akselin yläpuolella olevia pystysuoria tai  $x$ -akselin suorassa kulmassa leikkaavia puoliympyröitä. Näitä suoria on havainnollistettu kuvassa 5.18. Poincarén puolitasossa on useita suoran  $l$  kanssa yhdensuuntaisia suoria, jotka kulkevat pisteen  $P$  kautta. Tämä huomataan kuvasta 5.19.



Kuva 5.19: Yhdensuuntaiset suorat Poincarén puolitasossa.



## Viitteet

- [1] Baragar A. *A Survey of Classical and Modern Geometries*. Prentice Hall, New Jersey 2001.
- [2] Berele A. ja Goldman J. *Geometry: Theorems and Constructions*. Prentice Hall, New Jersey 2001.
- [3] Boyer C. *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osa I*. Art House, Helsinki 1994.
- [4] Boyer C. *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osa II*. 3. painos. Art House, Helsinki 2000.
- [5] Greenberg M. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 2nd Ed. W. H. Freeman and company, San Francisco 1980.
- [6] Heath T. L. *The thirteen books of Euklid's Elements, translated from the texts of Heiberg, with introduction and commentary*. Vol I-III. 2nd Ed. Dover, 1956. Myös verkossa: [<http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0086>].
- [7] Häkkinen K. *Matematiikan peruskurssi*. 4. painos. Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä 2001.
- [8] Lehtinen M. *Matematiikan historia*. Matematiikkalehti Solmu, 2000. URL: [<http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/>]. Viitattu 2.6.2010.
- [9] Lehtinen M., Merikoski J. ja Tossavainen T. *Johdatus tasogeometriaan*. 1. painos. WSOY, Porvoo 2007.
- [10] Merikoski J., Väänänen K., Laurinolli T., Sankilampi T. *Matematiikan taito 15: Lineaarialgebra*. 1. painos. WSOY, Porvoo 2007.